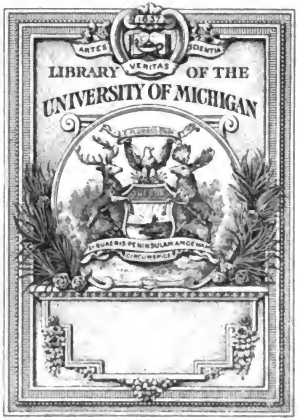
Astron. Obs.
QB
107
.P59
A572649
STORAGE



Digitized by Google

Astronomical
Observa
QB
107
.P59

Digitized by Google

Digitized by Google

63537

IGNATIUS PICKEL

PROF. DER MATHEMAT. IN EICHSTAEDT

ABHANDLUNG

VON EINEM

SECUNDENPERPENDIKEL

EINER

ATSRONOMISCHEN UHR,

DESSEN LÆNGE VON DER WÆRME ODER KÆLTE KEINE VERÆNDERUNG LEIDET.

Mit 1. *Kupfer.*

ERFURT 1787.

bey GEORG ADAM KEYSER.

Digitized by Google

Released 12-3-37 jm

Abhandlung

von einem

Secundenperpendikel einer aſtronomiſchen Uhr,

deſſen Länge von der Wärme oder Kälte keine Veränderung leidet,

von

Ignatius Pickel

Prof. der Mathematik in Eichſtädt.

Vorgeleſen in der Kurmaynziſchen Academie nützlicher Wiſſenſchaften zu Erfurth, den 3ten April 1786.

Daſs es nothwendig ſey, an dem Perpendikel einer aſtronomiſchen Sekundenuhr eine Korrektion anzubringen, welche den Fehler verbeſſere, der ſicher entſtehet, wenn bey gröſſerer Wärme oder Kälte die metallene Stange länger oder kürzer wird, iſt durch beſtändige Erfahrung auſſer allen Zweifel geſezt. Was in dieſer Sache Harriſon und Caſſini geleiſtet haben, iſt bekannt; und

 nebſt

Digitized by Google

nebſt dieſen haben wir noch andere Methoden, welche zur nämlichen Abſicht dienen.

Da ich im Jahre 1775 ſchon zum drittenmal eine aſtronomiſche Uhr verfertigen ließ, wollte ich dabey auf eine etwas neue Art einen Perpendikel anbringen, welcher unter folgenden Bedingniſſen ſeine ganze Länge unverändert beybehielte. 1. Er ſollte nur aus zween Stangen beſtehen, deren eine von Eiſen, die andere von Meſſing wäre. 2. Die ziemlich ſchwere Linſe ſollte gerad herab in der Mitte hangen, und auch nicht unten am Rande ſeiner Peripherie, ſondern in dem Mittelpunkte aufſitzen. 3. Endlich ſollte ſich die Einrichtung auf ein jedes Verhältniſs der Ausdehnung der zweyen Metallen, auch nach der gänzlichen Verfertigung ſicher und leicht beſtimmen laſſen.

2. Ich hatte mir nicht ohne Urſache dieſe Punkte feſtgeſezt. Wenn ich einen aus der nämlichen Stange gezogenen Drath ausnehme, wird man nicht leicht von einem Metalle zwo oder mehr bekommen, die, nachdem ſie zugearbeitet, gehämmert, und wohl auch gar in dem Feuer ſind ausgeglühet worden, noch eine gleiche Ausdehnungskraft beſitzen. Ich wenigſtens habe das Widerſpiel nicht einmal erfahren. Es iſt auch zwiſchen Eiſen und Eiſen zwiſchen Meſſing und Meſſing ein groſer Unterſchied. Durch wiederholte Verſuche fand ich das Verhältniſs der Ausdehnung von Eiſen und Tyroler Meſſing wie 11 zu 18; aber von Sächſiſchen wie 18 zu 25. Es iſt aber ſehr nahe

$$11 : 18 = 74 : 121$$

$$18 : 25 = 74 : 103$$

Das erſte kommt mit der insgemein angenommenen 74 : 121 gänzlich überein; das andere aber iſt ſehr unterſchieden, und zeiget an, daſs ſich Sächſiſches Meſſing, das ich aus Nürnberg kommen ließ, weniger, und faſt

nur

nur wie Kupfer ausdehne, wovon Muſſchenbroeck *) 310 fand, wenn Eiſen 230 hat; denn es iſt 23 : 31 = 74 : 99, 74.

Wenn die Linſe nicht in der Mitte der Stange hängt, iſt der Perpendikel der Gefahr des Wankens ſehr unterworfen, wovon ein ganz ungleicher Gang der Uhr entſtehet. Ich erfuhr dieſes an einer, bey der ich nach der Vorſchrift des Herrn le Paule **) die erſte Art des Caſſiniſchen Perpendikels anbrachte. Sie befindet ſich noch auf der Sternwarte zu Ingolſtadt.

Die Linſe ſelbſt iſt groſs, ſchwer, und insgemein mit Bley ausgegoſſen. Wenn ſie alſo nur an dem untern Rande vermittelſt einer Schraube feſtgehalten wird, bleibt ihr die ganze Freyheit, ſich in die Höhe auszudehnen, oder davon herab zu verkürzen. Dieſe Veränderung kann die angebrachte Korrektion groſſentheils vereiteln, weil ſo der Mittelpunkt der Schwere durch die ſtärkere Wirkung des Bleyes merklich verſetzet wird. Ich laſſe allezeit die Linſe in ihrem Mittelpunkte auffitzen, und ſo iſt daher nichts mehr zu fürchten.

Endlich eben deſshalben, weil nicht ſo richtig bekannt iſt, wie die zwo angebrachten Stangen ſich in ihrer Ausdehnungskraft gegen einander verhalten, muſs es noch bey dem ſchon verfertigten Perpendikel frey ſtehen, die ihr angemeſſene Vorrichtung anzubringen. Es muſs auch eben dieſe noch insgemein dieſes Verhältniſs überſteigen, weil die ſtählerne Feder, an welcher der Perpendikel hänget, und was noch ſonſt übrig iſt, nicht auſſer Acht darf gelaſſen werden.

3. Dieſe Vortheile hoffe ich durch einen Perpendikel zu erhalten, deſſen Beſchreibung ich zum Stoffe dieſer kleinen Abhandlung gewählet habe.

*) Tentamina Experimentorum in Academia del Cimento cum additionibus Petri van Muſſchenbroeck.

**) Traité d'Horlogerie par Mr. I. A. le Paule Horloger du Roy. A Paris, chez Jacques Chardon 1760.

Fig. I stellet ihn vor ohne dem gehörigen Verhältnisse der Theile, weil sie zu klein ausfielen; und von der Stange sind nur die beyden Ende wegen ihrer Länge gezeichnet. LM ist die stählerne Schwungfeder, an welcher der Perpendikel hängt, und wo er auch kann aufgeschraubet, oder niedergelassen werden. Sie ist 1 Z 11 10 Linien lang nach dem Pariser Schuh, in welchen ich durch diese ganze Abhandlung alle Grösen ansetze. NNN ist die messingene Regel 29 u. 3viertel Zoll lang, fast einen breit und eine Linie dick. Aber unten bey N N erstreckt sich eine verzierte Ausschweifung beynahe auf 3 Zolle. Hinter dieser befindet sich eine gleich lange, und durchaus gleich breite eiserne, welche eben bey M mit 3 Schrauben an sie befestiget ist, und damit diese Regeln sich nicht biegen, oder auseinder ziehen, sind in gleichen Abtheilungen drey Schrauben o o angebracht, die durch länglichte Löcher der messingenen passen, damit sich beyde insbesondere zwar frey nach der Länge verschieben, nicht aber auseinander geben können. Stählerne Vorlegblättchen verdecken die Löcher. Am Ende der eisernen bey C hängt an einem gemeinschaftlichen wohl abgedrehten und polirten Nagel, ein doppelter stählerner oder eiserner ziemlich starker gebogener Hebel ACE und BCD. Der Winkel ACE = BCD hat 135°, und also ist ACD = BCE = 45°, wenn AC und BC in einer geraden Linie liegen. Bey N und N sind an die messingne Regel zween kurze mit einer stumpfen und abgerundeten Schneide versehene Untersätze angestecket, die sich frey verschieben lassen, und vermittelst welcher sie auf die Hebelarme AC und BC auffizt. Ein jedes Ende D und E der schraegen Arme CD und CE ist mit gleichlangen und eben so starken Armen DF und EF verbunden, welche sowohl in F, als D und E, um stählerne polirte Nägel leicht beweglich sind. Es ist also CDEF ein ordentliches Quadrat, wenn AB eine gerade Line ist: sonst aber verwandelt es sich in einen Rhombus. Eine jede Seite ist gegen 14,75 Linien lang. Eben bey F an dem nämlichen Nagel hängt eine eiserne dort etwas gekrüpfte Regel FK, an welche unten bey K ein Schraubengewind angeschnitten ist. Oben bey F erstreckt sie sich hinter dem

dem Quadrate auf etwan 6 Zolle in die Höhe, und paſſet frey durch einen rückwärts an der obern eiſernen Regel angebrachten Kloben, nur zu dieſer Abſicht, daſs FK um den Nagel bey F nicht wanken könne. Nun an dieſe Regel iſt die Linſe GI angeſchoben, und zugleich eine meſſingene Hülſe KH angeſteckt, auf welcher bey H in ſeinem Mittelpunkte die Linſe auffizt, deſſen flaches Loch alſo bey HI weiter iſt, als bey GH. Die vorgelegte Schraubenmutter K trägt dieſe angeſezte Stücke. Die ganze Länge FK macht etwas über 12, 5, und KH 9 Zolle aus. Davon hat GI faſt 7. Die Linſe ſelbſt iſt ein Abſchnitt einer Kugel von einem Schuh im Durchmeſſer Die polirten meſſingenen Schalen ſind mit Bley ausgegoſſen, und wiegen etwas über 10 Pfund, der ganze Perpendikel aber iſt 13 ſchwer, nach dem Nürnberger Gewichte. Er macht ein ſchönes und zierliches Anſehen weil faſt nichts als wohlpolirtes Meſſing mit der ſtählernen Hebeleinrichtung in das Geſicht fällt.

4. Man ſiehet ſchon aus dieſer kurzen Beſchreibung die Verrichtung des Perpendikels ein. Die ſchwere Linſe drückt die horizontalen Hebelarme, wie ich ſie Kürze halber nenne, an die Unterſätze der meſſingnen Regel feſt an; und ſo iſt alles in einer unbeweglichen Verbindung aneinander angeſchloſſen Wenn aber eine gröſsere Wärme einfällt, verlängert ſich die hintere eiſerne Regel, und mit ihr ſenkt ſich die Linſe mit der Hebeleinrichtung herab. Zugleich aber verlängert ſich die meſſingne noch mehr, druckt, weil ſie oben an die eiſerne angeſchloſſen iſt, die horizontalen Hebelarme tiefer herab, hebt dadurch die Punkte D und E und den damit verbundenen F ſammt der ganzen Linſe und untern Regel. Zugleich auch dehnet ſich die meſſingne Hülſe K H in die Höhe aus, und erhebt ebenfalls ſo viel den Mittelpunkte der Linſe, als ihn die eiſerne FK, oder vielmehr die ganze Länge C K herabgelaſſen hatte.

Im widrigen Falle einer gröſsern Kälte geſchiehet das Widerſpiel. Meſſing wird mehr als Eiſen verkürzet; die Punkte A und B ſteigen mehr in die

Höhe,

Höhe, und dadurch sinket F sammt der Linse, welche ebenfalls die verkürzte Hülse KH so viel herabläßt, als sie durch gleiche Wirkung der längern eisernen FK und des Quadrats CF gehoben wurde. Es wird nämlich von einer gröfsern Wärme der senkrechte Durchmesser CF kürzer als der horizontale DE; von einer gröfsern Kälte aber länger als dieser. Es korrigirt die messingne Hülse H K den untern Theil des Perpendikels von der Hebelanrichtung bis zur Schraubenmutter K; und jene den obern Theil mit Einschlusse der stählernen Schwungfeder L M.

5. Es ist also die Hauptfrage zu beantworten, was AC zu CD, oder CB zu CE für ein Verhältniss haben solle, dass der Punkt F, und die ganze Länge LF in einem jeden Falle unverändert bleibe. Zugleich auch muss bestimmt werden die Länge von CK und HK, damit eine jede eine gleichgrosse Veränderung leide. Dass man bey dieser Verfertigung des Perpendikels ein jedes den zweyen Metallen angemessenes Verhältniss ganz leicht erhalten könne, ist daher schon richtig, weil sich die Unterstätze der messingnen Regel frey gegen C verschieben oder wegrücken lassen. Im ersten Falle wird die Korrecktion, die von ihr entstehet, gröfser: im zweyten aber kleiner.

Es stelle Fig 2 und 3 mit ausgezogenen Linien die Hebelanrichtung auf einen mittelmäfsigen Grad der Wärme vor, in welchem ACB eine gerade Linie und CEFD ein Quadrat ist. Nun werde die eiserne Regel von einer gröfsern Kälte (Fig. 2) um Cc, die messingne um Cm kürzer; oder von einer gröfsern Wärme (Fig. 3) um eben so viel länger; so kommen die Hebelarme ACE, und BCD in eine andere Lage ace und bce, und wenn die Unterstätze A und B in gehöriger Entfernung von C stehen, wird von dem in einen Rhombus ceFd verwandelten Quadrate der Punkt F unverändert bleiben. Stünde aber A und B zu nahe bey C, würden die horizontalen Arme (Fig. 2) zu hoch steigen, die schraegen sich mehr gegen CF neigen, und der Punkt F zu tief kommen, oder (Fig. 3) es würden die ersten zu tief herabgedrückt,

Digitized by Google

drükt, die lezten zu viel erhoben, und auch mit ihnen der Punkt F. Die gegenſeitige Wirkung entſteht, wenn CA und CB zu lang ſind.

Es ſeyn aber A und B in gehöriger Stelle, und man verlängere CD und cd (wenn es nöthig iſt) bis ſie in y zuſammenlaufen. Ziehe auch nebſt den Diagonalen CF, ED und ed die Linie ab = AB, welche zugleich mit dieſer parallel, und auf mF perpendikulär iſt. Weil cF in g und CF in Cc halbirt ſind, iſt Cc = 1/2 Gg. Es iſt auch der Winkel Cyc = cbm = cam. Denn wie ſeine Lage der Arm BC oder CA verändert, ſo verändert ſie auch der mit ihm verbundene CD oder CE. Der Winkel ACE = ace, oder BCD = bcd hat allezeit 135 Grade, und ACD oder BCE 45. Die Beſtimmung des Winkels Cyc = cam löſet die Aufgabe auf. Denn ſo wird aus cm und den Winkeln in dem rechtwinklichten Dreyecke cam die ſenkrechte am = AC bekannt, und alſo das Verhältniſs zu der unveränderten CD.

6. Es ſey alſo Cm : Cc = a : f, oder Cm = a, Cc = f und cm = a — f. Wenn hernach CD = cd = 1, ſo iſt im Quadrate CEFD die Diagonal CF = $\sqrt{2}$, und die halbe CG = 1/2 $\sqrt{2}$. Und weil Gg = 1/2 Cc = 1/2 f, ſo iſt (Fig. 2 und 3)

$$cg = \left\{ \begin{matrix} 1/2\,Cc + CG \\ -1/2\,Cc + CG \end{matrix} \right\} = \pm 1/2\,f + 1/2\sqrt{2} = \frac{\pm f + \sqrt{2}}{2}.$$

Aus cd = 1, und $cg = \frac{\pm f + \sqrt{2}}{2}$ findet man dg. Denn weil dg = cd — cg

$$= 1 - \frac{f^2 \pm 2f\sqrt{2} + 2}{4} = \frac{2 - f^2 \mp 2f\sqrt{2}}{4}, \text{ ſo iſt } dg = 1/2\sqrt{2 - f^2 \mp 2f\sqrt{2}}$$

Wenn also der Winkel g c d $= \phi$, so ist tang $\phi = \frac{dg}{cg} = \frac{1/2\sqrt{2-f^2-2f\sqrt{2}}}{\pm 1/2\, f + 1/2\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{2-f^2-2f\sqrt{2}}}{\pm f+\sqrt{2}}$$ Von dem doppelten Zeichen gehört allezeit das obere auf Fig. 2 und das untere auf Fig. 3.

Der Winkel DCG $= 45°$ ist bey Fig. 2 $=$ gcd $+$ Cyc $= \phi +$ cyc; bey Fig 3 aber ist gcd $= \phi =$ DCG $+$ Cyc $= 45° +$ cyc. Also ist für beyde Fälle Cyc $=$ cam $= \pm 45 \mp \phi$. Der andere acm macht mit diesem 90°; folglich wird acm $= 90° -$ cam $= 45° + \phi$ (Fig. 2) $= 90° + 45° - \phi = 135° - \phi$ (Fig. 3).

In dem rechtwinklichten Dreyecke cam sind also nebst der Seite cm $=$ a $-$ f alle Winkel bekannt, und es ist die gesuchte

$$ma = CA = cm \times \begin{cases} \text{tang. } (45° + \phi) & \text{Fig. 2} \\ \text{tang. } (135° - \phi) & \text{Fig. 3} \end{cases}$$

7. Diese Formel in eine tauglichere zu verwandeln, nehme ich aus der Trigonometrie als bekannt an, dass, wenn ein Winkel $= y$, der andere $= z$, so ist

$$\text{tang. } (y + z) = \frac{\text{Tang } y + \text{tang. } z}{1 - \text{tang. } y \times \text{tang. } z}$$

$$\text{tang. } (y - z) = \frac{\text{tang. } y - \text{tang. } z}{1 + \text{tang. } y \times \text{tang. } z}$$

In

In dieſem Falle iſt $y = 45^\circ$, und alſo tang y = tang $45^\circ = 1$. Eben ſo iſt auch tang 135° = tang $180^\circ - 135^\circ$ = tang $45^\circ = 1$. Nur muſs er, wegen der gegenſeitigen Lage des Tangenten eines ſtumpfen Winkels als negativ angenommen werden. Wird nun die Anwendung auf die für CA gefundene Formel gemacht, in welcher $\phi = z$, und 45° oder $135^\circ = y$, ſo iſt

$$ma = CA = cm \cdot \begin{cases} \dfrac{1 + \text{Tang. } \phi}{1 - \text{Tang. } \phi} & \text{Fig. 2} \\ \dfrac{-1 - \text{Tang. } \phi}{1 - \text{Tang. } \phi} = \dfrac{1 + \text{Tang } \phi}{\text{Tang. } \phi - 1} & \text{Fig. 3} \end{cases}$$

Die zweyte Formel für Fig. 3 iſt poſitiv wie die erſte. Denn weil in dieſem Falle der Winkel $\phi > 45^\circ$. iſt auch Tang $\phi >$ 1, und alſo tang. ϕ — 1 eine poſitive Gröſse. Uebrigens hat der negative Tangent von 135 hier nichts anders zu bedeuten, als daſs ſowohl cm als ma eine gegenſeitige Lage in Betracht des erſten Falles haben, welches aus der Natur dieſer Aufgabe richtig iſt.

8. Man hat alſo das verlangte Verhältniſs von CA zu CD, welches iſt

$$cm \cdot \frac{1 + \text{Tang. } \phi}{\pm 1 \mp \text{Tang. } \phi} : 1 \text{ oder}$$

$$cm \cdot (1 + \text{Tang. } \phi) : \pm 1 \mp \text{Tang } \phi$$

Nämlich die Länge des Horizontalen Hebelarms CA verhält ſich zur Länge des ſchrägen CD, wie cm die Differenz der Verkürzung oder Verlängerung

gerung der metallenen Stangen multiplicirt mit der Summe der Tangenten der Winkel DCG und deg, welche der schräge Arm mit der Verticallinie macht, da die horizontalen Arme eine gerade Linie ausmachten, und hernach davon abgiengen: zur Differenz der Tangenten eben dieser Winkel.

9. Wenn $cm = a - f$. und Tang. $\phi = \frac{\mp f + \sqrt{2 - f^2} \mp 2f\sqrt{2}}{\pm f + \sqrt{2}}$ gemacht wird, hat man die zur Berechnung eingerichtete Formel

$$CA = a - f \times \frac{\mp f + \sqrt{2 + f\sqrt{2 - f^2}} \mp 2f\sqrt{2}}{f \mp \sqrt{2} + \sqrt{(2 - f^2} \mp 2f\sqrt{2})}$$

10. Sie kann aber für die gegenwärtige Aufgabe weit einfacher und bequemer gemacht werden. Wenn in einer binomischen Grösse $a + x$ ein Theil x im Vergleiche des andern a sehr klein ist, so kann für das wahre Quadrat $a \pm 2ax + x^2$ ohne beträchtlichen Fehler $a \pm 2ax$ angenommen werden. Ja wenn auch um 2x das vorige vermindert wurde, so dürfte man dennoch $a \pm 2ax + x^2 = a^2 \pm 2ax - x^2$ machen, und besonders die Wurzel für beyde $= a \pm x$ ohne merklichen Fehler insgemein ansetzen.

Es ist wirklich $f = Cc$ gegen den Durchmesser $CF = \sqrt{2}$ allezeit in unsern Falle sehr klein. So ist also sehr nahe $2 \mp 2f\sqrt{2 - f^2} = 2 \mp 2f\sqrt{2} + f^2$, und für beyde die Wurzel $= \sqrt{2} \mp f$, bey welcher sich erst in der fünften Decimalstelle eine Differenz äussert, wenn $f = 0,01$; und bey

bey f = 0, 001 ſind die erſten ſechs ganz einander gleich. Auf ſolche Art verwandelt ſich die vorige Formel in dieſe ſehr einfache

$$CA = \overline{a-f}\,x\,\frac{\mp f+\sqrt{2}+\sqrt{2\mp f}}{f\mp\sqrt{2}\mp(\sqrt{2}\mp f)} = \overline{a-f}\,x\,\frac{2\sqrt{2}}{f\mp\sqrt{2}\mp\sqrt{2}+f}$$

$$= \overline{a-f}\,x\,\frac{2\sqrt{2}}{2f} = \frac{a-f}{f}\,x\,\sqrt{2}$$

Und alſo iſt $CA : CD = \frac{a-f}{f}\,x\sqrt{2} : 1 = \overline{a-f}\,x\,\sqrt{2} : f$

oder $CA : CD = cm \times CF : Cc$

Das iſt, der Horizontale Arm CA verhält ſich zum ſchregen CD, wie das Produkt der Quadratwurzel von 2 in die Differenz der Veränderun der Metalle, zur Veränderung desjenigen, welches ſich in der Kälte weniger zuſammenziehet, oder in der Wärme minder verlängert.

11. Ich will aber dennoch nach der erſten Formel dieſes Verhältniſs auf verſchiedene Grade der Wärme oder Kälte von der gröſsten bis zur mittlern berechnen. Es wird in unſerer Gegend auch in dem wärmſten Sommer das reaumuriſche Thermometer nicht über 20 bis 22 Grade über den Gefrierungspunkt ſteigen, und auch unter dieſen in einem ſehr kalten Zimmer nicht über 8 bis 10 Grade im kälteſten Winter herabfallen. Ich bin davon durch eine ſichere Erfahrung viel r Jahre überzeugt, da ich allezeit dreymal des Tages den Stand des Thermometers, welches neben der Uhr hanget, aufſchreibe. So beläuft ſich alſo die gröſste Veränderung zwiſchen Winter und Sommer beynahe auf 30 Grade Eben ſo viel giebt Herr De la Lande an *), und ſetzt

*) Aſtronomie par M. de la Lande ſeconde édition Tome ſecond, n. 2462.

Digitized by Google

dafür einen Fehler von 20″ bey einer astronomischen Uhr, wenn der Perpendikel nur aus einer eisernen Stange bestehet. So eine Veränderung des Ganges erfodert bey einem einfachen Pendel, welches 440, 57 Linien lang ist, eine Verlängerung oder Verkürzung von 1/5 oder genauer 0, 204 einer Linie.

Wenn also CD = 14, 75 oder glatterdings = 15 Lin. weil dieser Arm nicht zu lang seyn darf, so ist auf das höchste CD : Cc = 15 : 0, 204 = 1 : 0,0136; und wenn ich dafür setze 1 : 0,02, so dürfte CD nicht mehr als 10, 2 Lin. lang seyn, welches schon wenig ist, und ich wollte nicht einrathen, diesen Arm kleiner zu machen.

Der Werth 0,02, wie ich ihn zum höchsten annehme, bewirket also die ganze Verwandlung der 2ten Figur in die 3te; und wenn bey einem mittlern Grade der Wärme, welcher ist gegen fünf oder 6 über 0, die horizontalen Arme nach einer geraden Linie liegen, ist $Cc = f = 0,01$, $f^2 = 0,0001$, wenn CD = 1.

Nimmt man das Verhältniß an, Cc : Cm = 74 : 121, so ist $Cm = a = \frac{1,21}{74} = \frac{121}{7400}$ und $cm = a - f = \frac{47}{7400}$ bekanntermaßen ist $\sqrt{2} = 1,4142135623$ &c. und also $2f\sqrt{2} = 0,0282842712$. Wenn diese Werthe in der allgemeinen Formel bey n. 9 gesezt werden, kommt folgendes heraus.

Für den Fall in Fig. 2.

$\sqrt{2 - f^2} - 2f\sqrt{2}$	$= 1,404143$ |	$- 1,404142$
$f + \sqrt{2}$	$= 1,424213$ |	$+ 1,424213$
	$2,828356$ |	$0,020071$

Die

Die erſte Summe mit $\frac{47}{7400}$ multiplicirt, wird $= 0,01796388$. Alſo iſt

$$CA : CD = \frac{0,01796388}{0,020071} : 1 = 89501 : 100000$$

Für den Fall in Fig. 3.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2f^2} + 2f\sqrt{2} = 1,424143 & -\ -\ -\ +\ 1,424143 \\ -\ f\ +\ \sqrt{2} = \underline{1,404213} & f - \sqrt{2} - \underline{1,404213} \\ 2,828356 & 0,019930 \end{array}$$

Die Multiplication giebt das nämliche. So iſt:

$$CA : CD = \frac{0,01796388}{0,01993} : 1 = 90134 : 100000.$$

Wäre die Berechnung mit der kürzern Formel (n. 10.) angeſtellet worden, welche keinen Unterſchied zwiſchen den beyden Fällen angiebt, hätte man beynahe das Mittel zwiſchen den vorigen Verhältniſſen erhalten. Dieſes iſt 89818 : 100000, und aus $s - \sqrt{f} \times \sqrt{2} : f$ wird 89822 : 100000.

Damit auch der Winkel $cam = Cyc$, und der andere $dcg = \varphi$ bekannt werde, darf nur $cm = \frac{47}{7400}$ durch $am = CA$ getheilt werden, aber ſo, daſs $CD = 1$ ſey.

Log $\frac{47}{7400}$ $= 7,802866$ Fig. 2

$CA = 0,89501 = 9,9518279$

L. T. $cam = 7,8510383 = 0^\circ 24' 23'' = Cyc$

Alſo iſt der Winkel $\varphi = 44\ 35\ 37 = dcg$

$CA =$

Fig. 3

$$CA = 0,90134 = \begin{array}{r} 7,8028662 \\ 9,9548886 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7,8479776 = 0.\ 24.'\ 13\ '' = \text{Cyc} \\ \text{und der Winkel } \varphi = 45.\ 24\ \ 13 = \text{deg} \end{array}$$

Fig. 2 und 3

$$CA = 0,89822 = \begin{array}{r} 7,8028662 \\ 9,9533827 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7,8494835 = 0.\ 24.\ 18 = \text{Cyc} \\ \text{und der Winkel } \varphi \text{ im Mittel} = 45^{\circ} + 24'\,18'' = \text{deg} \end{array}$$

12. Bey einem jeden dieſer äuſſerſten Fälle verändert ſich auf einen Tag der Gang der Uhr um 10″, und das Thermometer giebt 20 bis 22 Grade oder 8 bis 10 unter 0 an. Wenn alles im Mittel wird ausgeſchlagen erfodert der tägliche Fehler einer Secund auf der Uhr, welchen eine Veränderung von anderthalb Graden des Thermometers hervorbringt, daſs $Cc = 0,001$ CD werde, und CA von ihrer vorigen Lage um 2′ 26″ abweiche. Ich habe alles genau berechnet, und es in beygeſezte Tafel eingetragen, damit man auf einmal vom gröſsten bis zum kleinſten alle Veränderungen der Hebelanrichtung einſehen könne.

Digitized by Google

Cc = f wenn CD = 1	Auf die Fälle von Fig. 2 und 3.		
	Verhältniſs von CA : CD	Winkel cam = Cyc	Winkel φ = deg
0, 01	0, 89501 : 1	0° . 24′ . 23″	44° . 35′ . 37″
	0, 90134 : 1	0 . 24 . 13	45 . 24 . 13
0, 009	0, 89336 : 1	0 . 21 . 57	44 . 38 . 3
	0, 90105 : 1	0 . 21 . 49	45 . 21 . 49
0, 008	0, 89368 : 1	0 . 19 . 30	44 . 40 . 30
	0, 90073 : 1	0 . 19 . 24	45 . 19 . 24
0, 007	0, 89603 : 1	0 . 17 . 3	44 . 42 . 57
	0, 90039 : 1	0 . 16 . 59	45 . 16 . 59
0, 006	0, 89634 : 1	0 . 14 . 37	44 . 45 . 23
	0, 90008 : 1	0 . 14 . 33	45 . 14 . 33
0, 005	0, 89669 : 1	0 . 12 . 10	44 . 47 . 50
	0, 89974 : 1	0 . 12 . 8	45 . 12 . 8
0, 004	0, 89698 : 1	0 . 9 . 44	44 . 50 . 16
	0, 89945 : 1	0 . 9 . 42	45 . 9 . 42
0, 003	0, 89722 : 1	0 . 7 . 18	44 . 52 . 42
	0, 89911 : 1	0 . 7 . 17	45 . 7 . 17
0, 002	0, 89777 : 1	0 . 4 . 52	44 . 55 . 8
	0, 89866 : 1	0 . 4 . 52	45 . 4 . 52
0, 001	0, 89822 : 1	0 . 2 . 26	44 . 57 . 34
	0, 89822 : 1	0 . 2 . 26	45 . 2 . 26

13. *Anmerkung.* 1. Die Punkte A und B (Fig. 1. 2 und 3) wo die Unterſätze oder Füſse der meſſingenen Regel aufſtehen, ſind eigentlich veränderliche Punkte, weil eine jede Abänderung an der Länge der metallenen Stangen zur vollſtändigen Korrektion des Fehlers ein beſonderes Verhältniſs von CA zu CD erfordert, und zwar ein anders für die Verkürzung, und abermal ein anders für die gleichgroſse Verlängerung. Der Unterſchied liegt in der berechneten Tafel vor Augen, und iſt aus der Formel von tang. Φ (n. 9.) bewieſen. Denn dieſe kann unmöglich ein immer gleiches Verhältniſs geben, wenn nicht, wie ich n 10 beynahe als wahr angenommen habe. $\sqrt{2-f^2} \mp 2f\sqrt{2} = \sqrt{2} \mp f$, welches niemals geſchehen kann, wenn nicht $f = 0$ iſt, für welchen Falle die ganze Anrichtung unnöthig wäre. Daſs aber dennoch das Verhältniſs von CA : CD = 0,89822 : 1 als unverändert, und die verkürzte Formel bey n. 10, welche dieſes angiebt, in der Ausübung als richtig könne angenommen werden, beweiſe ich alſo.

Für den gröſsten Werth von $f = 0,01$, und $cm = \frac{47}{4CO}$ mache man $ma = CA = 0,89822$, und berechne daraus den Winkel $cam = Cyc$. Er iſt $= 24', 18'', 4$, und alſo (Fig. 2.) $dcg = \Phi = 44°, 35', 41'', 6$, und (Fig. 3.) $= 45, 24', 18'', 4$. Nun wenn $CD = cd = 1$, ſo iſt (Fig. 2.) cF der doppelte Cosinus, oder (Fig. 3.) der doppelte Sinus dieſes Winkels. Davon ziehe man ab, im erſten Falle $Cc = 0,01$, oder ſetze es im zweyten hinzu, ſo ſoll der Reſt, oder die Summe der Quadratwurzel von 2 oder CF gleich ſeyn. Der erhaltene Unterſchied iſt der noch übrig gebliebene Fehler, welchen dieſes noch unrichtige Verhältniſs nicht gehoben hat. Hier ſind die Produkte dieſer Rechnung.

Doppel-

Digitized by Google

Doppelter Coſinus von 44°. 35′. 41″, 6 = 1, 424177
— Cc = 0, 01
1, 414177
√2 — = 1, 414213
Unterſchied = 0, 000036

Dieſer zeiget an, wie viel bey Fig. 2. der Punkt F noch zu hoch ſtehe.

Doppelter Sinus von 44°. 35′. 41″, 6 = 1, 404179
+ Cc = 0, 01
1, 414179
√2 = 1, 414213
Unterſchied = 0, 000034

Um ſo viel ſolte F bey Fig. 3 noch tiefer herabgelaſſen ſeyn.

Wie viel dieſe Fehler ausmachen, wird leicht gefunden, wenn man ſagt, Cc = 0, 01 verändert den Gang der Uhr um 10″ des Tags; wie viel verändert ihn 0,000036, oder 0, 000034? nämlich um 0″,036 im höchſten Winter, und 0, 034 im höchſten Sommer. Es würde erſt in 30 Tägen, wenn ſo lange die gröſste Wärme oder Kälte unverändert anhalten ſolte, die Uhr beynahe um 1″ zu früh gehen. Ich glaube der ſtrengſte Aſtronom, welcher ſich ſo lange Zeit bis auf eine Secunde damit verſichern könnte, würde allerdings damit zufrieden ſeyn.

14. *Anmerkung II.* Es iſt keineswegs bewieſen, daſs, wenn auch die Abänderung der Wärme und Kälte noch ſo verſchieden iſt, dennoch immer das nämliche Verhältniſs verbleibe, nach welchen ſich zwey Metalle verlängern oder verkürzen. Vielmehr iſt das Widerſpiel durch die Erfahrung rich-

Digitized by Google

tig, welche mit ſtark erhizten Metallen iſt angeſtellt worden. Man darf nur Muſſchenbroecks Experimente mit einander vergleichen, eine überzeugende Probe davon zu haben. Ob aber dieſe Ungleichheit ſchon merklich ſey, bey einer Abänderung von 30 Graden des Thermometers, der ein ungeheiztes Zimmer ausgeſetzet iſt, können faſt nur gute aſtronomiſche Uhren, welche mit ſo zuſammengeſezten Perpendikeln verſehen ſind, richtig entſcheiden. Der bekannte Harriſoniſche mit 9 Stangen, der ohne Hebelanrichtung durch die 4 meſſingene, gerade ſo viel die 5 eiſenen in die Höhe erhebt, oder davon herabläſst, als ſie ſich durch die Wärme verlängert, oder durch die Kälte verkürzet hatten, ſollte vor andern den Schiedrichter machen. Nach dem Zeugniſs des Herrn de la Lande, in der ſchon angezogenen Stelle *), iſt der Ausſpruch vollkommen günſtig, und man darf gemäſs der Erfahrung, dieſes Verhältniſs als unverändert annehmen.

Ich will aber dennoch unterſuchen wie der Fehler bey meinem Perpendikel beſchaffen ſey, wenn allenfalls daher einer entſtünde, und ihn hernach mit dem Harriſoniſchen vergleichen. Es ſey (Fig. 2.) das Verhältniſs Cc zu Cm angenommen, darnach ma = CA beſtimmt, und der Unterſatz der meſſingenen Kegel in A verſetzet worden. Nun aber äuſsert ſich ein anders Cc zu Cp; und da man pq mit ma parallel macht, welche ca in r ſchneidet (die, wenn p oder m fiele, müſste verlängert werden), ſollte dieſe Kegel, die ihre Länge nur um Cp = Sr, nicht aber um Cm = Aa verändert hat, in r aufſitzen. Weil aber dieſes in q geſchiehet, wo pq = ma, ſo ziehe man cq, welche die Verſetzung des horizontalen Arms von CA in cq vorſtellet, da doch nach cr kommen ſollte. Es ſind alſo die ſchregen Arme ce und cd nicht

*) Er ſchreibt alſo n. 2462, da er von den Harriſoniſchen Perpendikeln handelt, welche an viele Uhren Englands und Frankreichs ſind angebracht worden. „„Elles réunissent de la manière la plus complette" und n. 2465. „Les Astronomes d'Angleterre m'ont assuré plusieurs fois qu'on faisoit par ce moyen des Horloges à pendule qui ne varioient pas de plus de 5″ par année."

nicht genug gegen CF geneigt, und der Punkt F ſtehet etwas zu hoch in £ der Fehler wird, wie bey n. 14. berechnet.

Es iſt $pq = am = \frac{cm \times \sqrt{2}}{Cc} = 0{,}89822$, und auch ep bekannt. Denn es ſey das neue Verhältniſs Cc : Cp = 74 : 118, ſo iſt $ep = \frac{44}{7400}$ wenn Cc = 0,01. Berechnet man aus dieſen den Winkel cqp = 22′. 45″, 4, ſo hat man auch dcg, und das Complement cdg = 45°. 22′. 45″, 4 Der um Cc = 0,01 verminderte doppelte Sinus dieſes Winkels iſt 1,413544 welcher gegen $\sqrt{2}$ = 1,414213 um 0,000669 = Ff zu klein iſt. Es ſollte alſo die Uhr um 0″,669 auf einen Tag zu früh gehen, weil Cc = 0,01 ihren Gang um 10 Secunden verändert

Bey dem Harriſoniſchen Perpendikel, wenn die Länge der Stangen nach dem Verhältniſſe 74 : 121 eingerichtet iſt, haben die zwo eiſenen auf einer Seite, ſammt der mittlern gegen 1297 Linien. Wenn ſich alſo 440,57 (n. 11.) um 0,102 verkürzen oder verlängern, macht dieſes 0,300279 bey 1297 aus, und eben auch ſo viel bey den zween meſſingenen. Wenn aber bey dieſen das Verhältniſs von 121 zu 118 gekommen iſt, leiſten ſie nicht mehr ſo viel ſondern nur 0,292834. Die Differenz 0,007445 iſt der übrig gebliebene Fehler = 0″,73 nach der Zeit, um 0″,061 gröſer gegen den vorigen. Wenn alſo das Zeugniſs von Herrn de la Lande und den engliſchen Aſtronomen, wie ich nicht zweifle, richtig iſt, muſs ſo eine Abänderung des Verhältniſſes nicht vorkommen, oder bey dem von mir verfertigten Perpendikel weniger, als bey dem Harriſoniſchen zu fürchten ſeyn.

15. *Anmerkung III.* Es iſt noch ein kleiner Zweifel zu beantworten übrig. Bey einem mittlern Stande des Thermometers ſollen die Hebelarme CA und CB eine gerade Linie ausmachen. Wie iſt aber dieſes von dem Künſtler zu erwarten, und wird er wohl bey der Zuſammenfügung auf das Ther-

mometer ſehen, und nach dieſem die Wärme ſeiner Werkſtube mäſsigen? nein, das wäre ganz unnöthig. Er macht anfangs die Unterſätze etwas höher, fügt den Perpendikel zuſammen, und hängt unten ein Gewicht an. Da er hernach ein gerades Linial über A B legt, wird ſich bald zeigen, ob der Punkt C zu hoch oder zu tief ſtehe, wenn jenes nicht durchaus aufliegt. Die etwas verkürzte Unterſätze heben den Fehler. Sie laſſen ſich hernach frey hin und her ſchieben, ohne Bewegung der Hebelanrichtung, wenn nur die untere horizontale Fläche der meſſingenen Regel auf ihre Länge perpendiculär, und alſo mit A B parallel iſt. Das Zimmer wird juſt eben nicht den höchſten Grad der Wärme haben, ſonſt könnte er dieſe Arbeit auf einige Stunden verſchieben. Ob hernach das Thermometer 6 bis 8 Grade oder o angebe, oder nicht, an dem iſt wenig gelegen. Nur folgt daraus, daſs für die äuſerſten Fälle in Fig. 2 und 3 nicht beyderſeits C c gleich groſs ſey. Das hat aber nichts zu bedeuten. Man ſehe nur die Tafel ein bey n. 12. Bis auf eine unbeträchtliche Kleinigkeit ſind in ſelber die Winkel c a m mit dem Werthen von C c in einem gleichen Verhältniſſe: denn wie die lezten, ſo nehmen auch die erſten in einer arithmetiſchen Progreſſion ab.

Ich gebe aber wieder das gröſste zu, welches kaum geſchehen wird, und ſetze, A C B ſey eine gerade Linie, da eben die Wärme des Zimmers auf das höchſte geſtiegen iſt. So wird alſo der Fall von Fig. 3 niemals vorkommen, und C c kann bis auf 0,02 anwachſen, da $c m = \frac{47}{3700}$ wird. Aus dieſen, und C A = 0, 89822 im Mittel nach der Formel n. 10 finde ich den Winkel c a m = 0°. 48′. 36″, 8, welcher genau noch ſo groſs iſt, als ihn (n. 13.) C c = 0,01 gab. Nun berechne man, wie dort, den Fehler aus den um 0,02 verminderten doppelten Sinus von e d g = 45°. 48′. 36″, 8. Man bekommt 0,000143, welcher auf einen Tag in der Zeit, nur 0″,143 ausmacht. Es iſt alſo richtig, daſs auch die äuſerſte Unachtſamkeit eines Künſtlers bey dieſem Perpendikel keinen merklichen Fehler auf die Uhr bringen könne, wenn nur ſonſt alles fleiſsig ausgearbeitet iſt.

16. Nach-

Digitized by Google

16. Nachdem ich die Hebeleinrichtung vollſtändig, wie ich glaube, erklärt habe, iſt noch eine andere Korrektion übrig, die unter ihr bey der Linſe angebracht, und ſchon anfangs n. 3 und 4 iſt beſchrieben worden. Das über die eiſene Regel CK (Fig 1.) geſteckte meſſingene Rohr KH ſoll den Mittelpunkt der Linſe in einem unveränderten Abſtande von C erhalten. Dieſes wird nur geſchehen, wenn KH um ſo viel kleiner iſt, als CK, um wie viel ſich das Eiſen weniger verlängert oder verkürzet, als das Meſſing. Nämlich es muſs ſeyn CH + KH : KH = 121 : 74; oder CH + KH − KH : KH = 121 − 74 : 74; das iſt, CH : KH = 47 : 74, und alſo KH = CH x $\frac{74}{47}$ Bey meinem Perpendikel hat CH 70,3 Linien; ſo ſollte alſo KH 110,7 lang ſeyn. Es fehlt nur etwas weniges; denn es iſt KH = 109,5, vielleicht, weil ſich anfangs CH nicht ſo genau beſtimmen läſst, uud ich es um etwas kleiner angenommen habe Es iſt aber daran nichts gelegen: ja ich rathe KH eher länger machen zu laſſen; denn, wenn dieſes Rohr mehr korrigirt, als KC erfodert, hat die Hebelanrichtung weniger zu leiſten, und die Unterſätze A und B ſind weiter von C entfernet; da im Gegentheile ſie auch den Fehler heben muſs, den die zu kurze meſſingene Hülſe noch übrig läſst. Dieſe ſtehet bey mir unter der Linſe noch 68 Linien vor, und wenn es auch 72 bis 80 wären, würde dadurch der Perpendikel kein übles Anſehen bekommen.

17. Ein auf ſolche Art verfertigter, und nach allen Theilen fleiſig ausgearbeiteter Perpendikel, wird ohne Zweifel ganz richtig den vorhabenden Abſichten entſprechen, wenn nur die Unterſätze der meſſingenen Regel im gehörigen Orte ſtehen. Dieſer aber wird kaum anders, als durch Beobachtung korreſpondirender Höhen, oder einer guten Mittagslinie gefunden. Ich habe mich beyder Mittel bedient, und zu Anfang des Jahrs 1776, wo ich eben die von mir gezogene Mittagslinie prüfen wollte, die Unterſuchung ſo angeſtellet.

Vom 16. bis 19 Jänner, und auch vom 14. bis 25. Hornung war die Temperatur des Zimmers, in welchem die Uhr hanget, und auch die Mittagslinie

Digitized by Google

tagslinie sich befindet, ziemlich gleich, und ein gutes Thermometer mit Weingeist, von dem berühmten Mechanikus Brander in Augsburg *), zeigte beständig 5 bis 6 Grade unter temperirt an. Ich konnte auch diesen Stand mit geringer Mühe, bey einer ziemlich gleichen und nicht zu kalten Witterung leicht erhalten, weil von meinem Wohnzimmer aus mir eine Thür den Zugang zur Uhr unmittelbar gestattet. Es gieng diese täglich um 2″, 2 zu früh. Vom 20. Jänner bis 2. Hornung fiel die schon bekannte grosse Kälte ein, der ich vielmals mit Oefnung der Fenster den freyen Zugang gestattete. Das Thermometer zeigte nunmehr im Mittel und fast unverändert, 22 bis 23 Grade unter temperirt an, folglich um 17 mehr, als vorher. Aber diese 17 Grade respondiren nur gegen 15 auf dem Reaumurischen. Ich beobachtete, weil das Wetter sehr heiter war, mit der Mittagslinie fast täglich die correspondirenden Höhen der Sonne. Mit einer ganz geringen Differenz accelerirte die Uhr im Mittel 5″, 7 des Tags, und also 3, 5 mehr, als vom 16. bis 19 Jänner, und auch nachmals vom 14. bis 25. Hornung. Diese 3″, 5 kommen von 15 Graden gröserer Kälte her, welche (n. 11) würde 10 hervorgebracht haben, wenn nicht der Perpendikel schon 6, 5 gehoben hätte.

Er wurde wirklich, ohne Abrechnung der Korrektion, um Ce = 0,102 Lin. verkürzet, und weil die Uhr noch einen Fehler von 3″, 5 anzeigte, war der Punkt F (Fig. 2.) noch um 0,036 Lin. zu wenig von der Hebelanrichtung herabgelassen weil A und B zu weit von C entfernt waren. Ich habe also nach einer Zeit, auf einem tausendtheilichen Maasstabe des Pariser Schuhes CA und CD genau gemessen. Es hatte CD 102,2, und CA 91,1 Theile. Diese Zahlen mit 0,144 multipliciret, geben in Linien CD = 14,7168 und CA = 13,1184. Wenn aber, wie es hier die Formel erfodert, CD = 1 wird

*) Es ist dieses von temperirt bis zum Punkte des siedenden Wassers in 100 Grade getheilt; und der Gefrierungspunkt stehet 10,4 unter 0 oder temperirt.

wird, iſt $CA = \frac{131184}{147168} = \frac{911}{1022} = 0,891389$, $Cc = f = \frac{1020}{147168} = \frac{85}{12264} = 0,006930$8, und endlich $0,036 = Ff$, um welches F zu hoch ſtehet, $= \frac{30}{147168} = \frac{5}{2044} = 0,0024462$. Daher könnte ich berechnen das wirkliche Verhältniſs von Cc zu Cm, und was nach dieſem CA zu CD für eines haben ſollte.

Es iſt $CF = \sqrt{2} = 1,4142135$, und $Cc = 0,0069308$. Die Summe davon iſt cF, wenn F wäre unverrückt geblieben: weil er aber um $FF = 0,0024462$ zu hoch ſtehet, darf nur $cf = 1,4186981$ angenommen werden, deſſen halber Theil $cg = 0,709349$. Dieſer iſt eben der Sinus des Winkels dcg, weil $cd = 1$. Man findet für ihn 45°, 10′ 55″, 1; und alſo iſt $gcd = 44°, 49′, 4″, 9 = \Phi$, und $cyc = cam = 45° - \Phi = 10′, 55″, 1$.

Aus dieſem Winkel ſammt $ma = CA = 0,891389$ kann $cm = ma \times \text{tang. } cam$ berechnet, und hernach $Cm = Cc + cm$ gefunden werden.

L. T. 10′, 55″, 1 = 7, 5018849

$ma = \frac{911}{1022}$ = 9, 9500675

7, 4519524 = 0,0028?1082 = cm = a − f

0,0069308 54 = Cc = f

0,0097619 36 = Cm = a

Es iſt alſo bey dieſer Uhr das Verhältniſs $a : f = 9761936 : 6930854 = 104, 22 : 74$, welches von 121 : 74 weit abgehet.

Wie ſich CA zu CD = 1 verhalten ſolle, beſtimmt die Formel $CA = \frac{a-f}{f} \times \sqrt{2} = \overline{a-f} \times \sqrt{2} \times \frac{12264}{85}$. Von a − f iſt der Log. eben vorher gefunden worden.

$$\begin{aligned}
\text{Log. } s-f &= 7,4519524\\
\sqrt{\ }2 &= 0,1505150\\
12264 &= 4\ 0886321\\
\frac{1}{85} &= 8,0705811-10.\\
\hline
&9,7616806 = 0,57767 = CA.
\end{aligned}$$

Es soll also seyn $CD : CA = 100000 : 57767$; und weil $CD = 14,7168$, wird $CA = 8,5015$ Linien.

§. 8. Warum das Verhältniss von Cc zu Cm so sehr verschieden gegen 74 : 121 ausgefallen sey, ist die Ursache nicht diese, dass sich die messingene Regel nach Maas anderer zu wenig verlängere oder verkürze. Es muss die Hebelanrichtung auch die Veränderung der stählenen Schwungfeder L M. (Fig. 1.) sammt jenem Theile bey M korrigiren, wo die Stangen zusammengeschraubet sind. Die Summe davon macht über 2, 5 Zolle aus. Vielleicht ist ihr auch noch etwas vom untern Theile CK überlassen, wenn die messingene Hilfe nicht alles leistet. Es kann auch seyn, dass der Künstler wider mein Einrathen und Verlangen die messingne Regel zu steif gearbeitet, und zu stark gehämmert habe, wodurch die Ausdehnungskraft vermindert wird. Nun alles dieses wird durch die Rechnung dem Verhältnisse Cc : Cm zugeschrieben, wenn gleich wirklich cm gröfser ist, als man daher findet. Es liegt aber nichts an diesem. Wenn nur der Fehler gehoben wird, er möge aus was immer für einer Quelle entspringen.

Man muss auch aus gleichen Ursachen bey dem Harrisonischen Perpendikel die Länge der messingenen Stangen gröfser machen, als das Verhältniss von 74 : 121 erfodert. Doch würde man dort gewiss einen Fehler von 3', 5 so leicht und geschwind nicht gehoben haben. Nachdem ich die Untersätze der

der meſſingenen Regel auf 8, 5 Lin. von C verſchoben hatte, fand ich bis daher auch in der gröſsten Kälte und Wärme keinen beträchtlichen Fehler mehr, den ich dem Perpendikel allein zugeben könnte. Es äuſserten ſich freylich hin und wieder Ungleichheiten in dem Gange der Uhr: aber da eben dieſe zwar gut, doch nicht auf das vollkommenſte ausgearbeitet iſt; da auch das Oehl ſtocket oder trocknet, und was andere dergleichen Mängel ſind, welche von der Reibung, von Zähnen und Trieben, und alſo von gehemmter Kraft des Gewichts entſtehen, durfte ich nicht alles dem Perpendikel auf die Rechnung ſchreiben. Es wäre mir aber ſehr erwünſchlich, wenn ein geſchickter Künſtler nach der neueſten Art, und mit jener ganz beſondern Vollkommenheit, wie es in England geſchiehet, für einen erfahrnen Aſtronom ſo einen Perpendikel an die Uhr anbrächte, um zu ſehen, wie viel man ſich davon verſprechen könne.

Meinen eigenen Fehler will ich hier nicht verbergen, den ich einsmal vielleicht aus einem unrichtigen Verſtande der Sprache, begangen hatte. Ich lieſs ſtatt des Meſſings Kupfer nehmen, weil ich bey de la Lande, le Paute und auch in andern franzöſiſchen Büchern durchaus *Cuivre* fand. Ich entdeckte aber bald den Fehler, und wurde durch eigene Erfahrung, mit welchen jene von Muſſchenbroeck in der Hauptſache übereinſtimmen, richtig, überzeugt, daſs ſich Kupfer weit weniger als Meſſing ausdehne, und zu ſolchen Perpendikeln nicht wohl tauglich ſey, wo es am beſten iſt, wenn zwey ſolche Metalle genommen werden, die unter dem nämlichen Grade der Wärme in der Ausdehnungskraft am weiteſten ſich von einander entfernen. Solche ſind nur, ſo viel mir bekannt iſt, ein gutes, weiches, nicht ſtahlartiges wohl ausgearbeitetes Eiſen, und ein milder, nicht zu ſpröder oder zäher Meſſing, der ſich von ſeinem Urſtoffe dem Kupfer in der Farbe, und in der Bearbeitung mit der Feile oder dem Drehmeifel am mehreſten unterſcheidet.

Digitized by Google

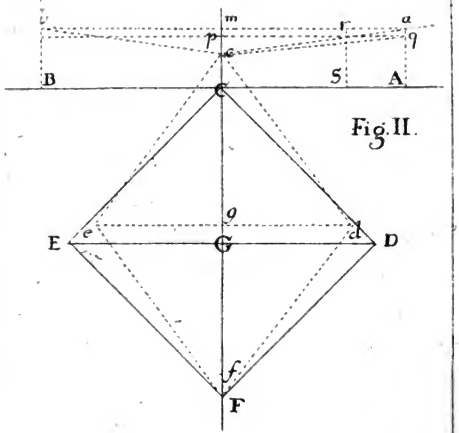
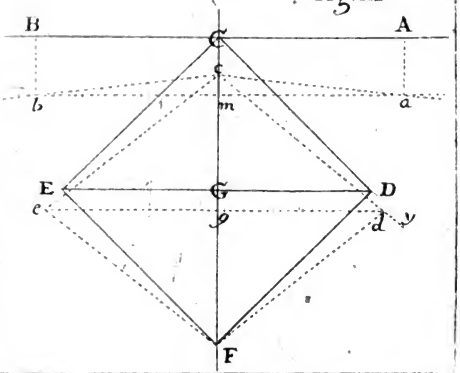


Fig. II.

Fig. III.



Digitized by Google

Digitized by Google

Z 6062 kgK

COMMENTATIO
DE
ABERRATIONIBVS STELLARVM FIXARVM
COMPVTANDIS

63838

QVA
AD AVDIENDAM
ORATIONEM
ADITIALEM MVNERIS
MATHESIN ET PHYSICAM
PVBLICE DOCENDI
DIE 12. APRILIS A. CIↃ IↃ CCLXXXVII.
HABENDAM
HVMANISSIME INVITAT

IOHANNES TOBIAS MAYER.

ERLANGAE
APVD IO. IAC. PALM. 1787.

Digitized by Google

Digitized by Google

§. 1.

Doctrinam de aberrationibus ſtellarum fixarum ad difficiliora aſtronomiae capita referri, et in inſtitutionibus huius ſcientiae paululum obſcure ſolere pertractari, nemo in hiſce rebus ſtudiorum ſuorum initii memor, eſt infitiaturus. Oſtendi nimirum ſolet, motum *apparentem* fixarum a luminis propagatione ſucceſſiva, et motu telluris in orbita ſua, oriundum, conſiſtere in eo, ut ſtella quaevis intra anni ſpatium, parvam ellipſin in coelo videatur deſcribere, cuius axis major, in ſphaera coeleſti arcum conſtantem 40 minutorum ſecundorum, plano ecliptices ſemper parallelum metiatur, minor vero pro ratione ſinus latitudinis fixae varietur, et pro ſtella quidem in polo ecliptices poſita itidem arcum 40 ſec. ſubtendat, pro alia vero, in ipſo plano ecliptices conſtituta evaneſcat, ita ut ſtella, quae careat latitudine, in longitudinem duntaxat aberrare videatur, dum alia in polo ecliptices ſita, ellipſin hoc caſu in circulum diametri 40 ſecundorum abeuntem, deſcribere ſit intelligenda. Hae, ut ſolent vocari, ellipſes aberrationum, cum doctrina proiectionum cohaerent, ope vero earum, aſtronomi ſtellarum ſitus reſpectu aequatoris mutatos, h. e. aberrationes in declinationem et rectaſcenſionem earum ſolent computare, aliaque exinde deducere, quae in hoc negotio aſtrono-

morum praxi ſubveniunt, quemadmodum ex diſſertationibus Clairautii (Mem. de l'Acad. de Paris 1737) Simpſonii (Eſſays on ſeveral ſubiects 1740) Caillii in lectionibus aſtronomicis, D. de la Lande (Aſtronomie liv. 17) aliorumque, ulterius licet perſpicere.

Sed plerumque accidit tyronibus, ut motuum apparentium et proiectionum theoria optica, nondum ſatis verſati, non tantum in ellipſibus illis apparentibus, quovis caſu diſtincte ſibi repreſentandis, ſed potius adhuc in ipſis regulis, pro computu aberrationum exinde methodo graphica deducendis, et quocunque caſu ſine errandi periculo applicandis, aqua ipſis ſoleat haerere, nec diffiteor, me quoque, cum aſtronomiae ſtudium inchoarem, in hac aberrationum theoria maiorem ſimplicitatem deſideraſſe. Hinc, facturusne operae pretium ſim, ſi niſſis quidem ellipſibus illis, et prolixiori exinde nata figurarum ambage, hanc doctrinam analytice potius perſcripſerim, iudicio aliorum quidem relinquo; mihi vero ea, quae iam tradam, prae ceteris ſatisfecere. Forſan et aliis haud ingratum laborem ſuſcepiſſe videar.

§. 2

1) Repreſentet igitur Circulus ϒΘV in ſphaera fixarum eclipticam, et in ejus plano, figura γOQTγ, orbitam telluris, in cuius loco T, tempore quocunque dato haereat tellus, in qua oculus ſit conſtitutus, qui obſervet Solem C iuxta rectam TC prolongatam in loco ☉ Ecliptices, ita, ut poſito in ϒ initio arietis, ſit ϒΘ , vel quoque angulus γC☉, longitudo Solis vera, conſueto more, ex ephemeridibus, pro tempore dato, excerpenda.

2) Ducatur jam a ſtella quadam fixa S, cuius latitudinem hic borealem aſſumo, linea quaedam recta ST ad oculum

Digitized by Google

lum ſpectatoris, eritque (demiſſa ex puncto quodam L, ipſius ST, perpendiculari LM, in planum eclipticae, iunctaque TM) angulus STM, latitudo ſtellae vera, angulus vero ⊙TM elongatio eiusdem a Sole, iuxta Eclipticam numerata, ubi ceterum ſtellam in figura propoſita, ita aſſumo, ut, ducta tangente, vel perpendiculari Tt in ⊙T, verſus eandem plagam, iuxta quam tellus T in directione Tr, in orbita ſua movetur, angulus MTr ſit acutus, vel ſaltem minor 90°.

3. His itaque poſitis, recta Tt, in directione tangentis Tr ſumta, exprimat celeritatem telluris in loco T orbitae ſuae, recta vero aT, in directione ST, luminis a fixa quadam ſtella venientis velocitatem, facileque poteſt demonſtrari, oculum in T conſtitutum, celeritate quidem Tt motum, a lumine vero iuxta directionem aT perculſum, ſtellam haud in loco ſuo vero S, fore percepturum, ſed eandem in plano anguli STr iuxta aliam directionem Ts, a recta TS exiguo angulo STs, a ratione celeritatum telluris in orbita, et luminis, pendente, aberrantem, eſſe conſpicaturum. Ponatur ſcilicet in Fig. 2, rectas Tt, TS, eandem habere ſignificationem, quam illis dedimus in figura 1, ſumtasque eſſe Tt, Ta, in ratione velocitatum telluris in orbita ſua, et luminis, conſtructo parallelogrammo atαt, facile erit demonſtrare, diagonalem Tα, expreſſuram eſſe directionem, iuxta quam ſtella, oculo in T conſtituto, a vero ſuo loco S, angulo STα aberrans, ſit comparitura h. e. in directione TS *verum* ſideris, in diagonali vero Tα, utcunque prolongata, *viſum* ſive *apparentem* eius *locum* s, iri repertum.

4. Hunc angulum deviationis STα, *aberrationem*, planum vero STt (Fig. 2) ſive STr (Fig. 1), *planum aberrationis* ſolent vocare aſtronomi.

5. Ope eclipſium ſatellitum iovis cognoverunt aſtronomi, celeritatem mediam telluris in orbita ſua ad eam luminis, eſſe in ratione 1: 10313.

Sumtis igitur Fig. 2 rectis, $Tt = 1$; $Ta = 10313$, positoque angulo STt, quem constituit recta ad locum verum stellae S, cum directione Tt telluris in orbita sua, $= \Psi$, fiet angulus $\alpha aT = 180° - \Psi$ et in triangulo αaT, cognitis $a\alpha = 1$; $aT = 10313$, posito sinu toto $= 1$, erit

$$\text{tang } \alpha Ta = \frac{a\alpha \text{ sin } \alpha aT}{aT - a\alpha \text{ cos } \alpha aT} = \frac{\text{sin } \Psi}{10313 + \text{cos } \Psi}$$

6. Cum vero angulus αTa semper sit admodum exiguus, potest poni tang $\alpha Ta = \alpha Ta$ in partibus sinus totius. Porro erit quoque semper sine errore sensibili $10313 + \text{cos } \Psi = 10313$. Hinc proxime

$$\alpha Ta = \frac{\text{sin } \Psi}{10313}$$

vel in minutis secundis

$$\alpha Ta = \frac{\text{sin } \Psi . \ 206264'' = 20'' \text{ sin } \Psi}{10313}$$

quae igitur quantitas, aberrationem fixae, in plano STr exprimet; hoc vero angulo STs (Fig. 1) $= 20''$ sin Ψ, raro astronomi utuntur, sed potius solent computare, quae exinde consequatur aberratio, tam in longitudinem, quam in latitudinem fixae.

7. Cum scilicet observator T, stellam S non in loco suo vero S, sed eandem in plano aberrationis STr, iuxta directionem Ts; a vera TS angulo $20''$ Sin Ψ aberrantem conspiciat, facile patebit, hac aberratione, non modo elongationem veram stellae a Sole, hinc quoque eius longitudinem, sed etiam latitudinem eius veram paululum mutari. Sit l punctum quoddam in directione apparenti Ts pro lubitu assumtum, ab eoque perpendiculum lm, in planum ecliptica demissum, erit angulus lTm *latitudo stellae apparens*, angulus vero

vero mT⊙ *elongatio eius a Sole apparens*, quae igitur quantitates omnino, a veris LTM, MT⊙ (2) differre cenſentur. Erit ſcilicet angulus exiguus mTM mutatio elongationis ſtellae a ſole, ab aberratione luminis oriunda, differentia autem angulorum LTM – lTm, exinde conſecuta latitudinis variatio, quas igitur quantitates ſequenti problemate invenire docebimus.

§. 3.

Problema.

Reperire aberrationes tam latitudinis fixae, quam elongationis eiusdem a ſole

Sol. Voceptur latitudo vera LTM = β, elongatio vera MT⊙ = ε.

8. Latitudinem hinc ſumo borealem, elongationem vero minorem 180°, ita ut angulus rTM (2) = ε — 90°, acutus ſit, verſus eandem plagam, iuxta quam excurrit directio prolongata Tt.

9. Iam ex puncto quodam L rectae TS (2) in tangentem Trt perpendicularis Lp demittatur, iunctaque pM, erit angulus LpM inclinatio plani aberrationis (4) ad eclipticam, quae vocetur LpM = B.

Si igitur linearum in Fig. 3 conſtructarum ſignificatio eadem ſit, quae Fig 1, circa punctum T nanciſcimur angulum ſolidum, ternis angulis planis LTM = β, pTM = ε — 90°, pTL = Ψ comprehenſum, quorum inclinatio ad ſe invicem ita ſe habet, ut ſit angulus inclinationis planorum LpM, et pTM rectus, bina vero plana TpL, pTM ſub angulo LpM = B (9) ad ſe invicem inclinentur. Quare ex regulis Trigonometriae ſphaericae, hae binae aequationes haud difficulter reperientur

$$\text{tang } B = \frac{\text{tang } \beta}{\text{ſin } (\varepsilon - 90°)}$$

$$\text{cof } \Psi = \text{cof } \beta \text{ cof } (\varepsilon - 90°)$$

10. Quia

10. Quia vero aberrationes, sive angulos exiguos STs, MTm (Fig. 1) ut et differentias latitudinum, verae LTM et visae lTm, tanquam differentialia quantitatum Ψ, ε et β licet considerare, simulque harum quantitatum Ψ, ε, β relationes aequationibus inventis (9) contineantur, in quibus angulum B pro eo momento, quo tellus in loco T orbitae suae haeret, tanquam constantem possumus tractare, ponendo dtang B = 0, differentiandoque, has binas sequentes aequationes differentiales, pro relatione aberrationum $d\Psi$, $d\varepsilon$, $d\beta$ porro nanscisemur.

I. $\sin(\varepsilon - 90°)\, d\beta - \sin\beta\cos\beta\cos(\varepsilon - 90°)\, d\varepsilon = 0$

II. $d\Psi \sin\Psi = \cos(\varepsilon - 90°) \sin\beta d\beta + \cos\beta \sin(\varepsilon - 90°)\, d\varepsilon$.

Quae posterior ob $d\Psi = 20'' \sin\Psi$ (6) abit in

III. $20'' \sin\Psi^2 = \cos(\varepsilon - 90°) \sin\beta d\beta + \cos\beta \sin(\varepsilon - 90°) d\varepsilon$.

11. Ex priori (I) fit

$$d\beta = \frac{\sin\beta \cos\beta \cos(\varepsilon - 90°)}{\sin(\varepsilon - 90°)} d\varepsilon$$

qui valor in posteriorem III substitutus praebet.

12. $$d\varepsilon = 20''. \frac{\sin(\varepsilon - 90°) \sin\Psi^2}{\cos\beta\,(\sin\beta^2 \cos(\varepsilon - 90°)^2 + \sin(\varepsilon - 90°)^2)}$$

13. Facile autem deducitur ex (9), fore

$$\sin\Psi^2 = \sin(\varepsilon - 90°)^2 + \sin\beta^2 \cos(\varepsilon - 90°)^2$$

14. Quocirca fiet (12) multo simplicius

$$d\varepsilon = 20'' \frac{\sin(\varepsilon - 90°)}{\cos\beta}$$

et hinc (11)

$$d\beta = 20'' \sin\beta \cos(\varepsilon - 90°)$$

quae igitur formulae exprimunt aberrationes fixae respectu eius elongationis a sole, eiusdemque latitudinis, ita, ut positis

elongatione vera fixae a sole = ε
latitudine eiusdem vera = β
elongatione apparenti = E
latitudine apparenti = b

esse

esse debeat $E = \varepsilon - 20'' \frac{\sin(\varepsilon - 90^\circ)}{\cos\beta}$

$$b = \beta - 20'' \sin\beta \cos(\varepsilon - 90^\circ)$$

quoniam scilicet sub conditionibus in (2) assumtis h. e. ponendo latitudinem stellae borealem, et angulum $\varepsilon - 90^\circ$ recto minorem, non modo angulus $pTS = \Psi$, quantitate $d\Psi = 20''\sin\Psi$ decrescat, sed quoque elongatio apparens et latitudo stellae visa, minores esse debeant veris, adeoque differentialia $d\Psi$; $d\varepsilon$, et $d\beta$ ut negativa spectentur.

15. Per centrum solis C (Fig. 1) agantur iam rectis TM, et Tm parallelae Cw, et Cx, eritque, si Tm eclipticam in puncto m secare intelligatur, punctis w et x itidem in ecliptica assumtis, arcus $\Upsilon\odot PVw$, longitudo vera stellae S, arcus vero $\Upsilon\odot PVx$ longitudo eiusdem apparens, quoniam scilicet ob infinitas fere stellarum, punctorumque m, w, x, a sole C, distantias, semidiameter CT orbitae terrestris instar puncti est habenda, adeoque rectae Tm, et Cx coincidere sunt intelligendae, ita ut punctum m in ecliptica, cui respondet longitudo $\Upsilon\odot PVm$ stellae, cum illo x prorsus congruere fit statuendum.

16. Si iam ponamus longitudinem stellae veram $= L$.
apparentem $= \lambda$.
longitudinem solis sive arc. $\Upsilon\odot = \lambda$.
arcus $w\odot$ erit mensura anguli $wC\odot = MTC = \varepsilon$.
arcus vero $x\odot$ mensura anguli $mTC = xC\odot = E$.
habebimusque simul in figura proposita

$$E = 360^\circ - \lambda + \lambda$$
$$\varepsilon = 360^\circ - L + \lambda$$

Consequenter (14)

$$360^\circ - \lambda + \lambda = 360^\circ - L + \lambda - 20'' \frac{\sin(270^\circ - L + \lambda)}{\cos\beta}$$

seu

seu

$$\lambda = L + 20'' \frac{\sin (270° - L + \lambda)}{\cos \beta}$$

vel quoque

$$17.\ \lambda = L - 20'' \frac{\cos (\lambda - L)}{\cos \beta}$$

$$= L - 20'' \frac{\cos (L - \lambda)}{\cos \beta}$$

Quae igitur formula ex vera longitudine ſtellae = L, docet reperire apparentem = λ, et valor $20'' \frac{\cos (L - \lambda)}{\cos \beta} = x$, qui ad veram longitudinem L debet accedere, ut reperiatur apparens, vocari ſolet aberratio ſtellae iuxta longitudinem, ſive ſimpliciter aberratio longitudinis.

18 Ex (14) fit porro latitudo apparens

$$b = \beta - 20'' \sin \beta \cos (270° - L + \lambda)$$

vel

$$b = \beta + 20'' \sin \beta \sin (L - \lambda)$$

ubi quantitas $20'' \sin \beta \sin (L - \lambda) = y$ appellatur aberratio latitudinis.

19. Excognitis regulis trigonometriae iam pro qualibet alia conditione reſpectu ſitus ſtellae verſus ecliptican diiudicari poterit, num aberrationes inventae, debeant addi ad longitudinem veram, latitudinemque, ſive vero ab illis ſubtrahi, ut reperiantur apparentes; hoc ſcilicet pendebit ab eo, an caſu quodam dato, ſinus vel coſinus, formulas (17. 18) ingredientes, valores recipiant poſitivos vel negativos, quod vero haud aegre, caſu quocumque oblato, regulae docent in elementis Trigonometriae ubivis obviae.

Sic e. gr. formulae (17. 18) latitudinem ſtellae borealem ſupponebant (2). Pro auſtrali, fit β quantitas negativa, et hinc $\sin -\beta = -\sin \beta$; $\cos -\beta$ ob coſinus angulorum negativorum poſitivos, $= +\cos \beta$. Quapropter hoc caſu habebimus.

λ =

$$\xi = L - 20'' \frac{\cos(L - \lambda)}{\cos \beta}$$

$$b = \beta - 20'' \sin \beta \sin (L - \lambda).$$

et sic in aliis casibus.

20. *Exemplum.* Quaerantur aberrationes longitudinis, et latitudinis Sirii, die 1 Maji 1777, tempore meridiei.

Ex Ephemeridibus Berol. ad annum propositum hoc tempore est longitudo Solis

$$\lambda = 41°.\ 20'.\ 8''$$

longitudo Sirii

$$L = 101°.\ 0'.\ 56''$$ et eius

latitudo australis

$$\beta = -\ 39°.\ 32'.\ 55''$$

Hinc prodit, neglectis, quod semper sine errore sensibili fieri potest, minutis secundis

$$L - \lambda = 59°.\ 40'$$
$$\sin \beta = -\sin 39°.\ 33'$$
$$\cos \beta = +\cos 39°.\ 33'$$

adeoque

log	$20''$ = 1,30103	log 20	= 1,30103
l. sin	β = 9,80396	l. cos(L - λ)	= 9,70331
l. sin(L - λ)	= 9,93606		11,00434
log y	= 1,04105	l. cos β	= 9,88709
		log x	= 1,11725

hinc in (17. 18) aberratio longitudinis $x = 13'', 1$

latitudinis $y = 11'', 0$

quae vero binae hoc casu debent esse subtractivae ut adeo sit

Sirii longitudo apparens $= 101°.\ 0'.\ 56'' - 13'', 1$
$= 101\ \ 0.\ 42,\ 9$

latitudo apparens $= -\ 39°.\ 32'.\ 55'' - 11, 0$
$= -\ 39.\ 33.\ 6$

Corollaria.

21. Si fit $L = \lambda$, sive longitudo solis = longitudini stellae, fit

$$\ell = L - \frac{20''}{\cos \beta}$$
$$b = \beta$$

hoc casu igitur latitudo apparens aequatur verae, quod contingit ergo, si stella et sol versentur in coniunctione.

22. Casu quo sit $L - \lambda = 180°$, vel sole cum stella in oppositione versante, habebimus

$$\ell = L + \frac{20''}{\cos \beta}$$
$$b = \beta$$

ergo iterum latitudinem apparentem verae aequalem.

23. Binis casibus (21-22) sol et stella versari dicuntur in *syzigiis*; in quibus ergo nulla habetur aberratio in latitudinem. Ponendo igitur hoc casu aberrationem longitudinis, sive valorem $\frac{20''}{\cos \beta} = \varphi''$, (quae quantitas pro qualibet stella seorsim potest computari, et pro ea constantem quasi exhibet coefficientem) pro quolibet alio casu erit

$$\ell = L - \varphi'' \cos (L - \lambda)$$

24. Posito $L - \lambda = 90°$, vel $L = 90° + \lambda$, fit

$$\ell = L$$
$$b = \beta + 20'' \sin \beta$$

25. Pro $L - \lambda = 270°$ itidem fit

$$\ell = L$$

sed $$b = \beta - 20'' \sin \beta$$

26. His binis casibus sol cum stella in *quadraturis* esse dicitur, in quibus igitur, longitudo apparens verae aequatur, nullaque datur aberratio in longitudinem. Ponendo vero

vero hoc casu aberrationem in latitudinem sive valorem $20''$ sin β, pro qualibet stella seorsim computandum $= \omega''$, generaliter erit aberratio in latitudinem $= \omega''$. sin $(L - \lambda)$ vel

$$b = \beta + \omega'' \text{ sin } (L - \lambda).$$

27. Hi valores φ'' et ω'', ut facile patet, erunt aberrationes *maximae*, stellae, cuius latitudo est $= \beta$, solentque astronomi has aberrationes maximas φ'' et ω'', pro qualibet stella seorsim computatas, plerumque catalogis fixarum inserere, ita ut deinceps, ope formularum

$$\lambda = L - \varphi'' \text{ cos } (L - \lambda)$$
$$b = \beta + \omega'' \text{ sin } (L - \lambda)$$

aberrationes fixarum pro qualibet longitudine solis admodum facile possint determinari, quo negotio arcus $L - \lambda$ *argumenta aberrationum* vocare mos est.

§. 4.

Problema.

Reperire aberrationes fixarum iuxta rectascensiones et declinationes earundem

28. *Solutio.* Cum rectascensio et declinatio sideris, pendeant ab eiusdem longitudine, latitudine, obliquitateque eclipticae, haud difficulter perspicitur, mutato, ob luminis propagationem successivam, stellae situ versus eclipticam, et eius positionem respectu aequatoris exinde aliquam passuram esse mutationem. Quapropter cum saepe his stellarum aberrationibus in rectascensionem et declinationem egeat praxis astronomica, in hac vero investigatione plerumque laborent astronomiae tyrones, iam peculiari methodo, facili, ut opinor, et explicata, hanc doctrinam pertractabo.

29. Sit igitur ascensio recta stellae $= \alpha$
declinatio eiusdem $= \delta$
longitudo vera $= L$

latitudo $= \beta$
obliquitas ecliptica $= \vartheta$
angulus positionis stellae $= p$
longitudo solis $= \lambda$

et in libris astronomicis sequentes reperiuntur formulae

I. $\sin \delta = \sin L \sin \vartheta \cos \beta + \cos \vartheta \sin \beta$

II. $\tang \alpha = \cos \vartheta \tang L - \frac{\sin \vartheta \tang \beta}{\cos L}$

III. $\cos \alpha = \frac{\cos \beta \sin p}{\sin \vartheta}$
IV. $\cos \delta = \frac{\cos L \sin \vartheta}{\sin p}$ } unde $\frac{\cos \beta \cos L}{\cos \delta} = \cos \alpha$

V. $\tang p = \frac{\sin \vartheta \cos L}{\cos \beta \cos \vartheta - \sin \beta \sin L \sin \vartheta}$

quae ob $\tang p = \frac{\sin p}{\cos p}$ etiam abit in

VI. $\cos \beta \cos \vartheta - \sin \beta \sin L \sin \vartheta = \frac{\sin \vartheta \cos p \cos L}{\sin p}$

VII. $\cos p \sin L - \sin p \sin \beta \cos L = \sin \alpha$
et ex (V)

VIII. $\tang \vartheta = \frac{\cos \beta \sin p}{\sin \beta \sin L \sin p + \cos L \cos p} = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}$

vel $\sin \beta \sin L \sin p + \cos L \cos p = \frac{\cos \beta \sin p}{\sin \vartheta} \cos \vartheta$
$= \cos \alpha \cos \vartheta$ (III)

IX. $\cot \delta = \frac{\cos \delta}{\sin \delta} = \frac{\cos \beta \cos L}{\sin \beta \cos p \cos L + \sin p \sin L}$

vel $\sin \beta \cos p \cos L + \sin p \sin L = \frac{\cos \beta \cos L}{\cos \delta} \cdot \sin \delta$
$= \cos \alpha \cdot \sin \delta$ (III. IV)

X. sint

X. $\sin\beta = \cos\vartheta \sin\delta - \sin\alpha \sin\vartheta \cos\delta$

XI. Ex (VII) fit porro multiplicando utrinque per $\sin\beta$ ponendoque deinceps $1 - \cos\beta^2$ loco $\sin\beta^2$,

$\sin p \cos L - \sin L \sin\beta \cos p$
$= \cos\beta^2 \sin p \cos L - \sin\alpha \sin\beta$
$= \cos\alpha^2 \sin\vartheta \cos\delta - \sin\alpha \sin\beta$ (III. IV)
$= \cos\alpha^2 \sin\vartheta \cos\delta - \sin\alpha(\cos\vartheta \sin\delta - \sin\alpha \sin\vartheta \cos\delta)$. (X)
$= \sin\vartheta \cos\delta - \sin\delta \cos\vartheta \sin\alpha$

30. Haec lemmata non modo varias relationes inter quantitates α, δ, L, β, ϑ, p (29) in praxi foepius obvias, oſtendunt, ſed quoque iam in theoria calculi aberrationum ulterius exponenda inſignem praeſtant uſum. Demonſtrationibus vero earum hic ſuperſedeo, cum partim in illuſtris KAESTNERI *Aſtronomiſchen Abhandlungen Erſte Samml. III. Kap. 1ſte u. 2te Aufgabe*, (correctis ibidem erratis typographicis in expreſſione tang λ, ubi in numeratore loco ſigni $-$ ponendum eſt $+$) et ibidem articulo 468, ubi agitur de angulo poſitionis, reperiantur, partim ex propria inſpectione, et comparatione laterum et angulorum trianguli ſphaerici, quod comprehenditur inter ſtellam datam, binosque polos eclipticae et aequatoris, ope trigonometriae ſphaericae eruantur. Quapropter iam ad ipſam aberrationum inveſtigationem accedo.

31. Hunc in finem aberrationes rectaſcenſionis et declinationis, ob parvitatem earum, tanquam differentialia conſideraſſe iuvabit, quae ex aberrationibus longitudinis et latitudinis ſupra inventis ſequenti modo facillime determinabuntur.

Differentietur aequatio (29. II) ita, ut quantitates α, β et L, ob mutationem earum propter aberrationes, ſpectentur variabiles, obliquitas vero eclipticae ϑ, cum aberratione haud afficiatur, ut conſtans tractetur, eritque

$$\frac{d\alpha}{\cos\alpha^2} = \frac{(\cos\beta\cos\vartheta - \sin\vartheta\sin\beta\sin L)\cos\beta}{\cos\beta^2\cos L^2}\,dL - \frac{\cos L\sin\vartheta}{\cos\beta^2\cos L^2}\,d\beta$$

Digitized by Google

Cum vero sit ex (29. VI)

$$\cos\beta\cos\vartheta - \sin\vartheta\sin\beta\sin L = \frac{\sin\vartheta\cos p\cos L}{\sin p}$$

hoc valore substituto fiet.

$$\frac{d\alpha}{\cos\alpha^2} = \frac{\cos\beta\cos p\,.\,dL - \sin p\,.\,d\beta}{\cos\beta^2\cos L\sin p}\,.\,\sin\vartheta$$

sed existente ex (29. III) $\cos\alpha^2 = \frac{\cos\beta^2\sin p^2}{\sin\vartheta^2}$, habebimus porro

$$d\alpha = (\cos\beta\cos p\,.\,dL - \sin p\,.\,d\beta)\,\frac{\sin p}{\sin\vartheta\cos L}$$

vel ex 29. IV.

$$d\alpha = \frac{\cos\beta\cos p\,.\,dL - \sin p\,.\,d\beta}{\cos\delta}$$

32. Haec igitur formula ostendit, quantum mutetur ascensio stellae recta, si longitudo eius L in L+dL, latitudo vero, eiusdem β abeat in $\beta + d\beta$.

Hinc substituendo loco dL, $d\beta$ aberrationes longitudinis et latitudinis, nimirum

$$dL = -\frac{20'' \cos(L-\lambda)}{\cos\beta} \quad (17)$$

$$d\beta = +20'' \sin\beta \sin(L-\lambda) \quad (18)$$

nanciscimur *aberrationem in ascensionem rectam stellae*

$$d\alpha = -20'' \frac{\cos p\cos(L-\lambda) + \sin p\sin\beta\sin(L-\lambda)}{\cos\delta}$$

ita ut posita ascensione recta vera $= \alpha$, visa $= A$ habeatur

$$A = \alpha + d\alpha$$

33. *Pro aberratione in declinationem*, sumo aequationem (29. I) differentiandoque nanciscor

$$d\delta\cos\delta = (\cos\vartheta\cos\beta - \sin L\sin\vartheta\sin\beta)\,d\beta + \cos\beta\cos L\sin\vartheta\,.\,dL$$

vel

vel ex (29. VI)

$$d\delta \operatorname{cof} \delta = \frac{\operatorname{fin} \vartheta \operatorname{cof} L}{\operatorname{fin} p} (\operatorname{cof} p \, d\beta + \operatorname{cof} \beta \operatorname{fin} p. \, dL)$$

ſive (29. IV)

$$d\delta = \operatorname{cof} p. \, d\beta + \operatorname{cof} \beta \operatorname{fin} p. \, dL$$

unde ſubſtituendo valores ipſarum dL, $d\beta$, obtinebimus.

34. $d\delta = -20''$ (ſinp. cof. $(L - \lambda)$ — cof p ſin β ſin $(L - \lambda)$) ita ut poſita declinatione ſtellae vera $= \delta$, apparente $= D$, habeatur

$$D = \delta + d\delta$$

35. I. Ante vero quam has (32 et 34) inventas formulas ulterius evolvam, magisque ad praxin accommodem, quaedam adhuc reſpectu aberrationis in aſcenſionem rectam admoniſſe iuvabit. Invenimus ſcilicet formulam (32) differentiando illam (29 II), h. e. tractando quantitates $d\alpha$, $d\beta$, etc. tanquam admodum parvas, ita ut pro differentialibus ſine errore ſenſibili haberi poſſint; iam vero conſiderando formulam pro valore ipſius $d\alpha$ inventam (32), ipſi diviſorem cof δ ineſſe deprehendimus, qui ponendo declinationem ſtellae fere quadranti aequalem, in fractionem admodum parvam abit, valoremque aberrationis $d\alpha$ hoc caſu valde magnum efficit, ita ut adeo infinitus fieret, pro ſtella quae in ipſo aequatoris polo eſſet ſita. Quod cum ſit abſurdum, patet hoc caſu formulam (32) haud poſſe locum habere, principiisque differentiationis, unde deducebatur, ex ea ratione adverſari, quod caſu, ubi declinatio ſtellae proxime ad quadrantem accedat, minime liceat, quantitatem $d\alpha$ ut admodum parvam conſideraſſe. Quapropter aliam iam formulam pro aberratione in aſcenſionem rectam inveſtigabo naevis iſtis carentem, et ad quamcumque ſtellae declinationem accommodatam.

II. Sit igitur (Fig. 4) AR ecliptica, eiusque polus in E; AQ Aequator, eiusque polus in P; S locus ſtellae verus,

Digitized by Google

s eiusdem locus apparens, ita ut planum aberrationis (4) ſphaeram coeleſtem iuxta arcum Ss ſecare intelligatur. Porro repreſentent Pl et Ei, circulos declinationis, et latitudinis, ut et si,sl arcus circulorum maximorum ipſis arcubus Ei, Pl normales.

III. His poſitis, cum locus verus S, apparenti s ſemper ſit admodum propinquus, exiſtente ſcilicet $Ss = d\Psi = 20''$ ſin Ψ (6), triangula Ssi, et Ssl tanquam rectilinea ſpectare licebit, in quibus ſit Si aberratio ſtellae iuxta latitudinem $= d\beta$, Sl vero aberratio iuxta declinationem, lSi angulus poſitionis $= p$. Angulus vero sPl in triangulo ſphaerico sPl exprimet aberrationem ſtellae in aſcenſionem rectam, quam igitur ſequenti modo perveſtigo.

IV. In triangulo rectilineo Sis, eſt

$$\text{cof sSi} = \frac{d\beta}{d\Psi_1} \text{ et hinc}$$

$$\text{ſin sSi} = \frac{\sqrt{(d\Psi^2 - d\beta^2}}{d\Psi}$$

V. Porro ſin sSl = Sin (sSi — lSi) = ſin (sSi — p) vel

$$\text{ſin sSl} = \text{ſin sSi cof p} - \text{ſin p cof sSi}$$

$$= \frac{\sqrt{(d\Psi^2 - d\beta^2)}\,\text{cof p} - \text{ſin p}\,d\beta}{d\Psi}$$

Hinc $sl = Ss \cdot \text{ſin sSl} = d\Psi \text{ ſin sSl}$ vel

$$sl = \sqrt{(d\Psi^2 - d\beta^2)}\,\text{cof p} - \text{ſin p}\,d\beta$$

VI. Sed $d\Psi = 20''$ ſin Ψ (6); $d\beta = -20''$ ſin β cof $(\varepsilon - 90°)$ (14)

$$= +20 \text{ ſin } \beta \text{ ſin } (L - \lambda) \text{ (18)}$$

Hinc $d\Psi^2 - d\beta^2 = 20^2 (\text{ſin } \Psi^2 - \text{ſin } \beta^2 \text{ cof } (\varepsilon - 90)^2)$

$$= 20^2 . \text{ ſin } (\varepsilon - 90°)^2 \text{ (13)}$$

et $\sqrt{(d\Psi^2 - d\beta^2)} = 20''$ ſin $(\varepsilon - 90°) = -20''$ cof $(L - \lambda)$, ſcilicet ob $\varepsilon - 90° = 270° - (L - \lambda)$; (16)

VIII.

VIII. Fit igitur arculus

$$ls = -20'' (\cos p \cos (L-\lambda) + \sin \beta \sin p \sin (L-\lambda))$$

quem vocabo = a.

IX. Hoc invento fit in triangulo sPl ad l rectangulo

$$\text{tang } sPl = \frac{\text{tang } ls}{\sin Pl} = \frac{\text{tang } a}{\cos \delta}$$

quia scilicet hic sine errore sensibili arcus Pl ipsi PS sive complemento declinationis δ potest surrogari.

X. Sic igitur pro aberratione stellae in ascensionem rectam nacti sumus formulam

$$\text{tang aberrat.} = \frac{\text{tang } a}{\cos \delta}$$

ex qua licet perspicere, casu, quo stella versetur in ipso aequatoris polo, tangentem aberrationis fieri infinitam, ipsamque consequenter aberrationem quadranti esse aequalem, neque adeo adipisci valorem infinitum, uti eveniret si formulam supra inventam (32) eo usque velimus extendere, ut adeo pro stellis polo admodum vicinis, eam adhuc iustam esse nobis persuadeamus.

XI. Interim tamen haec formula (32) adhuc satis late patebit, cum facile ostendatur, pro casu, quo stellam polo tam vicinam sumamus, ut vel uno alterove gradu duntaxat ab illo distet, attamen aberrationem eius iuxta veram formulam (x) computatam, tam parvam adhuc fore, ut tuto liceat, tangentes in illam ingredientes, arcubus ipsis aequales ponere, ideoque simpliciter statuere

$$\text{aberrat.} = \frac{a}{\cos \delta}$$

$$= -20'' \frac{(\cos p \cos (L-\lambda) + \sin \beta \sin p \sin (L-\lambda))}{\cos \delta}$$

h. e. computari poſſe iuxta eam duntaxat formulam quam ſupra (32) ex principio differentiationis elicuimus. Cum enim *maximus* valor ipſius α ſive arculi ls = d Ψ ſin sSl = 20″ ſin Ψ ſin sSl caſu quo ipſos angulos Ψ et sSl rectis aequales ſtatuamus, duntaxat ad 20″ aſcendat, tangens quoque aberrationis maximae pro ſtella, quam binis duntaxat gradibus a polo diſtantem ſumamus, pro qua igitur e. gr. ſit $\delta = 88°$, iuxta formul. tang aberr. $= \frac{\text{tang. } 20''}{\text{cof } 88°} = 0{,}0027\ldots$ tam parva adhuc eſſe deprehenditur, ut aberratione ipſa hoc caſu vix ad 10 minuta prima aſſurgente, ſummo iure liceat eandem ex hac modo formula

$$\text{aberrat.} = \frac{20''}{\text{cof } 88°} = 20'' \text{ ſec } 88°$$

computare.

Quapropter nihil impedit, quo minus formulam ſupra (32) *inventam, omnibus omnino ſtellis, polo, vel uno alterove gradu haud vicinioribus, adhuc convenire ſtatuamus*, in cuius igtur ulteriori explanatione jam pergere lubet.

35. Cum igitur ſit

$$\text{cof } (L - \lambda) = \text{cof } L \text{ cof } \lambda + \text{ſin } L \text{ ſin } \lambda$$
$$\text{ſin } (L - \lambda) = \text{ſin } L \text{ cof } \lambda - \text{ſin } \lambda \text{ cof } L$$

his valoribus ſubſtitutis, pro aberrationibus in aſcenſionem rectam et declinationem (32. 33) has nanciſcimur expreſſiones

I. $d\alpha \text{ cof } \delta = -20'' (\text{cof } p \text{ cof } L + \text{ſin } p \text{ ſin } \beta \text{ ſin } L) \text{ cof } \lambda$
$\quad - 20'' (\text{cof } p \text{ ſin } L - \text{ſin } p \text{ ſin } \beta \text{ cof } L) \text{ ſin } \lambda$

II. $d\delta = -20'' (\text{ſin } p \text{ cof } L - \text{cof } p \text{ ſin } \beta \text{ ſin } L) \text{ cof } \lambda$
$\quad - 20'' (\text{ſin } p \text{ ſin } L + \text{cof } p \text{ ſin } \beta \text{ cof } L) \text{ ſin } \lambda$

36. Quodſi vero expreſſiones in (29. VII. VIII. IX. XI) inventas hic ſubſtituamus, formulae (35) abeunt in

I. $d\alpha \text{ cof } \delta = -20'' \text{ cof } \alpha \text{ cof } \vartheta \cdot \text{ cof } \lambda$
$\quad - 20'' \text{ ſin } \alpha \cdot \text{ ſin } \lambda$

II. $d\delta$

II. $d\delta = -20'' (\sin \vartheta \cos \delta - \sin \delta \cos \vartheta \sin \alpha) \cdot \cos \lambda$
$- 20'' \cos \alpha \sin \delta \cdot \sin \lambda$

in quas igitur nullae ingrediuntur quantitates, praeterquam obliquitas eclipticae $= \vartheta$, aſcenſio recta ſtellae $= \alpha$, et eiusdem declinatio $= \delta$, cum ſolis longitudine $= \lambda$, pro tempore dato, ex ephemeridibus excerpenda; cum contra, formulis (34) praeter has dictas quantitates inſint quoque latitudo, et angulus poſitionis ſtellae, quae antea ex eiusdem aſcenſione recta et declinatione debent computari, niſi forte in catalogis fixarum iam reperiantur. Hoc reſpectu formulae (36) omnino ſimpliciores ſunt cenſendae, quia aſcenſiones rectae et declinationes ſtellarum, ex earumdem culminationibus obſervatis immediate habentur. Sed iam operam dabo, ut formulas inventas (I. et II) cum nimis adhuc ſint complexae, ad praxin magis accommodem, easque ad conſtructionem tabularum pro inveniendis aberrationibus, reddam concinniores.

37. Hunc in finem quaeratur primum angulus cuius tangens ſit $= -\cos \vartheta \cot \alpha$, Ponaturque angulus iſte $= C$.

38. Cum igitur ſit $\tang C = -\cos \vartheta \cot \alpha$ erit quoque

$$-\frac{\sin \alpha \sin C}{\cos C} = \cos \vartheta \cos \alpha$$

quo valore in formulam (36. I) introducto, prodibit

$$d\alpha \cos \delta = -20'' \frac{(\sin \lambda \cos C - \sin C \cos \lambda) \sin \alpha}{\cos C}$$

ſive
$$d\alpha = -\frac{20'' \sin \alpha}{\cos C \cos \delta} \sin (\lambda - C)$$
$$= -20'' \sin \alpha \sec C \sec \delta \sin (\lambda - C)$$

Hoc igitur modo, cognito ſemel angulo C ex formula (37) pro aberratione ſtellae in aſcenſionem rectam, admodum concinnam nacti ſumus expreſſionem, quae quolibet caſu, cum ex meris conſtet factoribus, per logarithmos poteſt expediri.

39. Hic vero angulus C ex ſola ſtellae rectaſcenſione $= \alpha$, obliquitateque eclipticae $= \vartheta$ determinatur (37) adeoque pro qualibet ſtella ſeorſim poteſt computari, ſemel vero computatus, conſtantem quaſi exhibet valorem qui computum aberrationis ſtellae in aſcenſionem rectam, pro quovis loco ſolis in ecliptica ſive potius telluris in orbita ſua, admodum facilitat. Facile autem apparet caſu quo ſit $\lambda = C$, evanituram eſſe aberrationem in aſcenſionem rectam, ſive fore $d\alpha = 0$, adeoque angulum C, ex formula

$$\text{tang } C = -\cos \vartheta \cot \alpha$$

determinatum, deſignare eam ſolis longitudinem, pro qua aberratio in aſcenſionem rectam ſtellae in nihilum abeat.

40. Eodem modo quaero longitudinem ſolis pro qua aberratio ſtellae in declinationem (36. II) evaneſceret. Hoc eveniet ſi ponamus ibidem

$$(\sin \vartheta \cos \delta - \sin \delta \cos \vartheta \sin \alpha) \cos \lambda + \cos \alpha \sin \delta \sin \lambda = 0$$

adeoque

$$\text{tang } \lambda = \frac{\cos \vartheta \sin \alpha \sin \delta - \sin \vartheta \cos \delta}{\cos \alpha \sin \delta}$$

$$= \cos \vartheta \text{ tang } \alpha - \sin \vartheta \cot \delta \sec \alpha$$

Poſita igitur longitudine ſolis hoc caſu $= F$ ita ut ſit quaerendus angulus F cuius tang $= \cos \vartheta$ tang $\alpha - \sin \vartheta \cot \delta \sec \alpha$, ex ſola declinatione et rectaſcenſione ſtellae innotescens, haec quantitas conſtans F ſimili modo computum aberrationis ſtellae ſublevabit, habemus enim

$$\cos \alpha \sin \delta \text{ tang } F = \cos \vartheta \sin \alpha \sin \delta - \sin \vartheta \cos \delta$$

et conſequenter, hoc valore in formulam (36. II) illato,

$$d\delta = + 20'' \cos \alpha \sin \delta \text{ tang } F \cos \lambda$$
$$- 20'' \cos \alpha \sin \delta \sin \lambda$$

$$\text{ſive } d\delta = 20'' \frac{\cos \alpha \sin \delta}{\cos F} (\sin F \cos \lambda - \sin \lambda \cos F)$$

$$= - 20'' \cos \alpha \sin \delta \sec F \sin (\lambda - F)$$

quae igitur formula iterum ſatis eſt concinna, et logarithmis poteſt computari.

41. In-

Digitized by Google

41. Interim ad faciliorem computum huius anguli F; ſequentia adhuc ſeſe offerunt. Queratur arcus = G, cuius tangens ſit = tang ϑ cot δ ſec α, logarithmis computanda, eoque invento, facile deducetur, fore

$$\text{tang } F = \frac{\text{ſin}(\alpha - G)\ \text{cof}\,\vartheta}{\text{cof}\,\alpha\ \text{cof}\,G} = \text{ſin}(\alpha - G)\ \text{cof}\,\vartheta\ \text{ſec}\,\alpha\ \text{ſec}\,G$$

42. Ponamus igitur brevitatis gratia (37)

$$20''\ \text{ſin}\,\alpha\ \text{ſec}\,C\ \text{ſec}\,\delta = A''$$

et (40) $$20''\ \text{cof}\,\alpha\ \text{ſec}\,F\ \text{ſin}\,\delta = B''$$

hae quantitates A'' et B'', a ſolis longitudine λ erunt independentes, pro ſtella vero data, exhibent factores conſtantes, ex rectaſcenſione et declinatione eiusdem computandos; quibus igitur computatis, cognitisque ſimul quantitatibus C et F, pro data ſtella itidem conſtantibus, cuilibet longitudini ſolis = λ, ſive telluris loco in orbita ſua = $180° + \lambda$, reſpondebit ſtellae

$$\text{aberrat. in rectaſc.} = -A''\ \text{ſin}\,(\lambda - C)$$
$$\text{in declin.} = -B''\ \text{ſin}\,(\lambda - F).$$

43. Formam huius calculi, exemplo iam declaraſſe iuvabit. Computandae igitur ſint aberrationes ſtellae $\beta\Upsilon$ tam in aſcenſionem quam in declinationem eius, et quidem pro anno 1780, exiſtente ſolis longitudine $\lambda = 30°$.

Eritque ex ephemeridibus berolinenſibus

aſcenſio recta $\beta\Upsilon = \alpha = 25°.\ 37'.\ 40''$
declinatio $= \delta = 19°.\ 43'.\ 37''$ bor.
obliquitas eclipt. $= \vartheta = 23°.\ 28'.$

Hinc, neglectis minutis ſecundis, quod ſemper licebit, ſumtisque duntaxat quatuor decimalibus in quolibet logarithmo, hoc genere calculi plerumque ſufficientibus, computus ita ſe habebit.

Digitized by Google

Pro angulo C eſt; log cof ϑ = 9,9625 — 10
log cot α = 0,3192
log tang C = 0,2817
C = 62°.24′

quia vero tangens huius anguli eſt negativa, (39) vel debet ſumi E = 180° — 62° 24′, vel poteſt quoque ipſe angulus negativus poni, ſive C = — 62° 24. quae poſterior expreſſio in continuatione calculi commodior videtur, ſi modo ex trigonometria conſtet, quibus ſignis hoc caſu lineae trigonometricae anguli negativi afficiantur. Cum in formula pro valore ipſius A″ occurrat ſec C = $\frac{1}{\text{cof C}}$ ob coſinus angulorum negativorum poſitivos, ſecans quoque anguli negativi C, poſitiva erit, ſcilicet ſec — C = ſec. C. Quapropter iam erit porro ob λ — C = 30° + 62° 24; *pro aberratione ipſa*,

log ſin α = 9,6358 — 10
log ſec C = 0,3341
log ſec ϑ = 0,0262
log 20 = 0,3010
hinc log A″ = 1,2971 = log 19″,82; et A″ = + 19″,82
log ſin (λ - C) = 9,9997 — 10
1,2967
hinc A″ ſin (λ-C) = + 19″,80

ideoque *aberratio in rectaſcenſionem* = — 19″, 80 (42) = dα (32) ita ut ſit rectaſcenſio ſtellae viſa, ſeu aberratione affecta = A = α + dα (42)
= 25°. 37′. 40″ — 19″,80
= 25°. 37′. 20″,20

§44. *Pro*

44. *Pro aberratione in declinationem* habemus (41)

log tang ϑ = 9,6376 - 10
log cot δ = 0,4456
log sec α = 0,0449

hinc log tang G = 10,1281
et G = 53°20′

adeoque $\alpha - G = 25°.37' - 53°.20' = -27°.43'$ qui angulus cum sit negativus, eius quoque sinus negativus erit, hinc quoque angulus F (41) ob sin $(\alpha - G)$, negativus evadet:

log sin $(\alpha - G)$ = 9,6673 - 10
log cos ϑ = 9,9625 - 10
log sec α = 0,0449
log sec G = 0,2239

adeoque l. tang F = 9,8986
F = — 38°.22′

hinc sec F erit positiva ut in (41) secans anguli C. Ob λ - F vero = 30° + 38°.22′ = 68°,22′ habemus porro

log 20 = 1,3010
log cos α = 9,9550 — 10
log sin δ = 9,5281 — 10
log sec F = 0,1056

hinc l. B″ = 0,3897
et B″ = + 7″,76
l. sin $(\lambda$ - F) = 9,9682 — 10

l. B″ sin $(\lambda$-F) = 0,8579
B″ sin $(\lambda$-F) = 7″,21

Erit igitur aberratio in declinationem sive $d\delta = -$ B″ sin $(\lambda - F)$ (42) = — 7″, 21 sive

declinatio stellae $\beta\Upsilon$ apparens = 19°. 43′. 37″ — 7″,21
= 19°. 43′. 29″,79 bor.

45. Pro stella igitur $\beta\Upsilon$ invenimus quantitates constantes

C = — 62°. 24′
A″ = + 19″, 82
F = — 38°. 22′
B″ = + 7″, 76

quibus

Digitized by Google

quibus ergo semel repertis, cuilibet solis longitudini = λ, respondebit

Stellae $\beta\Upsilon$ *aberr. in ascens. rect.* $= d\alpha = -19'',82 \sin(\lambda + 62°.24')$
aberr. in declin. $= d\delta = -7'',76 \sin(\lambda + 38°.22')$

quae ob logarithmos constantes ipsarum coefficientium $19'',82$; et $7'',76$, quovis casu oblato admodum facile logarithmis computantur.

Corollaria.

46. I. Aberratio in ascensionem rectam erit maxima, casu quo sin $(\lambda - C)$ sit $= +1$; ergo $\lambda - C = 90°$, sive $\lambda - C = 270°$, h. e. seu $\lambda = 90° + C$ seu $\lambda = 270° + C$. Priori casu ubi sit longitudo solis $\lambda = 90° + C$ erit aberratio *maxima negativa* $= -A''$, posteriori autem quo sit $\lambda = 270° + C$ erit aberratio *maxima positiva* $= +A''$.

II. Eodem modo aberratio *maxima* in declinationem erit $= -B''$ si sit longitudo $\odot = 90° + F$; positiva autem $= +B$ si sit $\lambda = 270° + F$.

III. Aberratio in ascensionem rectam erit $= 0$ si sit seu $\lambda - C = 180°$ sive $= 360°$, h. e. longitudo solis λ vel $= 180° + C$, vel $= 360° + C$.

Prior Solis longitudo $= 180° + C$ denotabit eam, ubi aberrationes negativae desinunt (46. I) et incipiunt fieri positivae; Posterior autem $\lambda = 360° + C$ eam designabit solis longitudinem pro qua aberrationes positivae evanescunt, et in negativas transire incipiunt.

IV. Simili modo pro longitudine Solis $= 180° + F$ aberrationes negativae in declinationem stellae, sunt evaniturae, et deinceps in positivos abiturae, pro solis vero longitudine

=

Digitized by Google

$= 360° + F$ definent aberrationes hae positivae, et in negativas transire incipient.

V. Sic pro stella $\beta\Upsilon$, pro qua invenimus $C = -62°, 24'$, aberrationes in ascensionem rectam *positivae* incipiunt. existente $\lambda = 180° + C = 180° - 62° 24' = 117°. 36' = 3^s\ 27°\ 36^I$, *negativae* incipiunt existente, $\lambda = 360° + C = 360° - 62°. 24' = 297°. 36' = 9^s. 27°. 36'$; pro aberratione *maxima* positiva est $\lambda = 270° + C = 270° - 62°. 24' = 6^s. 27°. 36^I$. pro aberratione vero maxima *negativa* est $\lambda = 90° + C = 27°. 36^I. = 0^s. 27°. 36^I$. unde igitur apparet has quatuor solis longitudines

$\lambda = 3^s. 27°. 36'$ pro qua sit aberratio in rect. $= 0$
$\lambda = 6. 27. 36$ - - - - - - - $=$ max posit.
$\lambda = 9. 27. 36$ - - - - - - - $= 0$
$\lambda = 0. 27. 36$ - - - - - - - $=$ max. neg.

semper tribus signis a se invicem distare.

VI. Simili modo aberrationes in declinationem stellae $\beta\Upsilon$, pro qua invenimus $F = -38°. 22'$, evanescent, vel fiunt maximae, existentibus Solis longitudinibus, uti sequitur.

Pro $\lambda = 4^s. 21°. 38'$ aberr. in decl. fit $= 0$
$\lambda = 7. 21. 38$ - - - - $=$ max. posit.
$\lambda = 10. 21. 38$ - - - - $= 0$
$\lambda = 1. 21. 38$ - - - - $=$ max. neg.

VII. Ex omnibus hactenus dictis id denique consequitur, quod pro computu aberrationum stellarum, cuilibet solis longitudini respondentium, in formulis (42) necesse sit, scire valores A'', B'', sive aberrationes *maximas* stellarum (46. I. II.) et deinceps valores constantium C et F, sive etiam longitudinum Solis $180° + C$, et $180° + F$, pro quibus aberrationes evanescunt, et incipiunt fieri positivae,

vel potius *additivae*. His quantitatibus pro qualibet ſtella fixa ſemel computatis, deinceps ope formularum (42) pro quolibet alio loco ſolis = λ, aberrationes calculo admodum facili reperiuntur.

Has vero quantitates A″, B″; 180° + C; et 180° + F, pro numero 280 fixarum in ephemeridibus berolinenſibus ad annum 1776 iam computatas deprehendimus. Quapropter caſu quodam oblato, has ad calculum aberrationum neceſſarias quantitates ex libro citato duntaxat excerpere, et ut inveniantur C et F, ab argumentis aberrationum, ut ibi vocantur arcus 180° + C, et 180° + F, duntaxat ſex ſigna ſive 180° debemus detrahere. Sic pro ſtella *Aldebaran* vocata reperimus ibidem pag. 106,

aberrationem maximam in rectaſc. = 20″,8
declinat. = 9″,8
argumentum aberrationis in rectaſc. ſive meum 180° + C = 5ˢ. 7°. 35′
declin. ſive meum 180° + F = 4ˢ. 6. 49

Hinc erit meum C = 5ˢ. 7°. 35′ — 6ˢ = — 0ˢ. 22°. 25′
F = 4ˢ. 6°. 49′ — 6ˢ = — 1. 23. 11
= — 53°. 11′.

Quapropter pro qualibet longitudine ſolis = λ, erit (42.)

Aldebar. aberr. in rectaſc. = — 20″,8 ſin (λ + 22°. 25′)
in declin. = — 9″,8 ſin (λ + 53°. 11′)

ſic pro aliis ſtellis.

47. Sed haec de ſtellarum aberrationibus ſufficiant. Id tantum adhuc monuiſſe iuvabit, valores ipſarum A″, B″, C, F; cum pendeant a ſtellarum rectaſcenſionibus et declinationibus, ſupra quidem dictos eſſe conſtantes; revera autem temporis decurſu paululum variari, exinde patet, quod non modo rectaſcenſiones et declinationes ſtellarum praeceſſione aequi-

aequinoctiorum afficiantur, sed quoque obliquitas Eclipticae haud omnino constans sit deprehensa. Interim tamen hae mutationes unius saltem seculi spatio tam parum valores ipsarum A'', B'', C, F afficient, ut sine errore sensibili liceat, eosdem pro constantibus haberi. Ceterum nec erit difficile, ope differentiationis mutabilitatem harum quantitatum, si aliquando opus esse sit deprehensum, dignoscere, et in computum vocare.

48. Denique haud abs re esse puto, et de solis aberrationibus quaedam subjungere.

I. Cum scilicet sol tamquam stella fixa in ecliptica sita debeat considerari, pro qua sit $\beta = 0$ et elongatio ε (14) itidem $= 0$, solis aberratio in longitudinem ex formula (16. 17) ponendo ibidem ε sive $360^\circ - L + \lambda = 0$ h. e. $L = 360^\circ + \lambda$, fiet $= - 20''$, seu locus solis apparens semper erit $20''$ minor, loco eiusdem vero λ.

II. Haec vero aberratio in longitudinem constans, inaequaliter tamen aberrationem solis iuxta ascensionem eius rectam et declinationem afficiet. Si scilicet sit

longitudo ☉	vera	$= \lambda$
declinatio	vera	$= \delta$
	visa	$= D = \delta + d\delta$
rectascens.	vera	$= \alpha$
	visa	$= a = \alpha + d\alpha$
obliquitas	eclipt.	$= \vartheta$ ut hactenus

Digitized by Google

erit ex trigonometria ſphaerica

$$\text{I. } \sin \delta = \sin \vartheta \sin \lambda$$
$$\text{II. } \cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta$$
$$\text{III. } \tan \lambda = \frac{\tan \alpha}{\cos \vartheta}$$

III) Hinc ope differentiationis ut ſupra

$$d\delta \cos \delta = \sin \vartheta \cos \lambda \cdot d\lambda$$

ſive ob $\cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta$,

$$d\delta = \sin \vartheta \cos \alpha \cdot d\lambda$$

ſeu ob $d\lambda = -20''$ (I), aberratio ſolis in declinationem erit $d\delta = -20'' \sin \vartheta \cos \alpha$; ſeu ob $\sin \vartheta = 0{,}398$

$$d\delta = -20''. 0{,}398 . \cos \alpha = -7'',96 . \cos \alpha$$

Hinc $D = \delta - 7'',96 . \cos \alpha$.

IV) Porro tertiam aquationem (III) differentiando, habemus

$$\frac{d\lambda}{\cos \lambda^2} = \frac{d\alpha}{\cos \alpha^2 \cos \vartheta}; \text{ adeoque}$$

$$d\alpha = \frac{\cos \alpha^2}{\cos \lambda^2} \cos \vartheta \cdot d\lambda$$

$$= \frac{\cos \vartheta}{\cos \delta^2} \cdot d\lambda = -20'' \cos \vartheta \cdot \sec \delta^2$$

$$= -20'',0{,}917 . \sec \delta^2$$

$$= -18'',34 . \sec \delta^2$$

et hinc $a = \alpha - 18'',34 . \sec \delta^2$.

quae formulae, ſi neceſſe eſſe cenſeatur, facile poſſunt in tabulas redigi.

Hisce

* * *

Hisce jam sub aditum muneris, quo matheſin et phyſicam in hac litterarum univerſitate docere, a Sereniſſimo PRINCIPE AC DOMINO CHRISTIANO FRIDERICO CAROLO ALEXANDRO, MARGGRAVIO BRANDENBVRGICO etc. PATRE PATRIAE INDVLGENTISSIMO benigniſſime juſſus ſum, pertractatis, reſtat ut adhuc oratione publica dicam, quam laetiſſimus exultet animus, hoc ſuavi mihi demandato officio fungi, quantaque pietate ſingularem OPTIMI PRINCIPIS indulgentiam veneretur atque colat. Dictus eſt huic orationi dies 12 Aprilis. Quapropter MAGNIFICVM ACADEMIAE PRORECTOREM, COMITES ILLVSTRISSIMOS, PROCANCELLARIVM ILLVSTREM, DIVINARVM HVMANARVMQVE LITTERARVM PROFESSORES AC DOCTORES ERVDITISSIMOS, CELEBERRIMOS, COMMILITONES DENIQVE NATALIBVS ET INGENIO NOBILISSIMOS GENEROSISSIMOSQVE, ut favoris ſui in me teſtimonium praeſentia ſua edere dignentur, ea qua par eſt obſervantia, oro rogoque. Dabam Erlangae menſe Aprilis cIↃ IↃ CCLXXXVII.

Digitized by Google

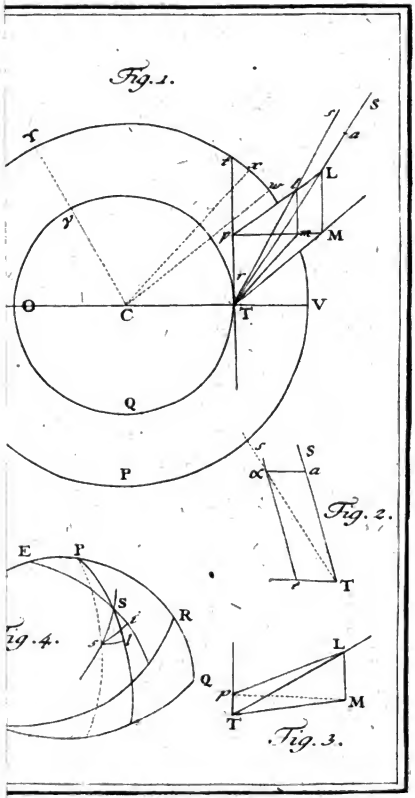


Fig. 1.
s
a
L
M
O
C
T
V
Q
P
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
E
P
S
R
Q

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 03600 1231

Digitized by Google